3 cycle implique chaos : l'ordre de Charkovski

Dans ce document la notation f^m a le sens suivant :

$$f^m = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{\text{m fois}}.$$

Le théorème suivant est connu sous le slogan "3-cycle implique chaos".

Théorème 1 (3-cycle implique chaos)**.** *Soit $f : I \to I$ une fonction continue. Si la suite des itérés de f admet un point $3-$périodique, c'est-à-dire s'il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \neq x_0, f^2(x_0) \neq x$ et $f^3(x_0) = x_0$ alors pour tout $m \in \mathbb{N}$ la suite des itérés de f admet un point $m-$périodique, c'est-à-dire qu'il existe $x \in I$ tel que*

$$\forall k \in \{1, \ldots, m-1\}, f^k(x) \neq x \text{ et } f^m(x) = x.$$

La preuve de du Théorème 1 est donné dans Francinou et al., c'est un un développement classique pour l'agrégation de mathématiques. Le Théorème 1 peut être étendu à l'ensemble des entiers via l'ordre de Charkovski qui est le suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
3 & \lhd & 5 & \lhd & 7 & \lhd & 9 & \lhd & \ldots \\
2\times 3 & \lhd & 2\times 5 & \lhd & 2\times 7 & \lhd & 2\times 9 & \lhd & \ldots \\
2^2\times 3 & \lhd & 2^2\times 5 & \lhd & 2^2\times 7 & \lhd & 2^2\times 9 & \lhd & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\ldots & \lhd & 2^n & \lhd & \ldots & \lhd & 2 & \lhd & 1
\end{array}$$

Ainsi, au sens de l'ordre de Charkovski, 3 est le plus petit des entiers : Si la suite des itérés d'une fonction admet un point 3-périodique alors pour tout entier $m \geq 1$, la suite des itérés de cette fonction admet un point m-périodique ; c'est le Théorème 1. Le second entier le plus petit est 5 : Si la suite des itérés d'une fonction admet un point 5-périodique alors pour tout entier $m \neq 3$, la suite des itérés de cette fonction admet un point m-périodique. Par contre on peut trouver une fonction ayant un point 5-périodique mais n'ayant pas de point 3-périodique...

Travail pour le groupe d'étudiants

La preuve du Théorème 1 nécessite simplement le théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi, ce projet s'adresse à des étudiants souhaitant présenter le CAPES ou l'agrégation. Le groupe d'étudiants pourra explorer les points suivants.

— Démontrer le Théorème 1.

— Illustrer numériquement le Théorème 1 en considérant, par exemple, la fonction $f : x \in [0,1] \mapsto ax(1-x)$ avec $a \in [0,4]$ et en calculant les itérés $f^k(x_0)$ pour $x_0 \in [0,1]$ bien choisi.

— Mettre en place une méthode numérique permettant de déterminer un point fixe.

— Tenter de démontrer l'ordre de Charkovski.

Références

S Francinou, H Gianella, and S Nicolas. Oraux x-ens. *Analyse 1.*