

Accrom α th

Volume 14 • hiver-printemps 2019



Le théorème des quatre couleurs

Autres *articles*

- Émergence logarithmique :
tables et calculs
- John Napier
- L'union fait la force
- Une somme qui sème
la controverse

Rubrique des
Paradoxes

L'information
paradoxe

Éditorial

Dans cet ouvrage

Avant l'avènement de la calculatrice, plusieurs méthodes visant à faciliter les multiplications ont été développées. La multiplication « par jalousie » et la méthode des quarts de carrés en sont quelques exemples. Ces méthodes sont présentées dans l'article **Émergence logarithmique, tables et calculs** par Jérôme Camiré-Bernier et Bernard R. Hodgson. Il y a 405 ans, John Napier publiait son *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. Les logarithmes constituent un développement important et ce n'est pas seulement la multiplication qui s'en retrouve simplifiée : la division, le calcul d'une puissance et l'extraction d'une racine sont elles aussi facilitées en utilisant les logarithmes.

Cet article est suivi de quelques notes biographiques sur le mathématicien **John Napier**, à qui l'on doit aussi les « bâtonnets de Napier » à l'aide desquels on peut effectuer des multiplications, des divisions et des extractions de racines sans avoir recours aux logarithmes.

La simplicité de l'énoncé d'un problème n'implique pas qu'il sera simple à résoudre. En 1852, Francis Guthrie a conjecturé qu'il suffisait de quatre couleurs pour colorier une carte géographique de telle sorte que deux pays voisins ne soient pas de la même couleur. La démonstration de cette conjecture, en 1976, par Kenneth Appel et Wolfgang Haken a nécessité, pour la première fois dans une preuve mathématique, le recours à l'ordinateur. Dans l'article **Le théorème des quatre couleurs**, du dossier *Application des mathématiques*, Christiane Rousseau présente les grandes lignes de la démonstration.

Dans l'article **L'union fait la force**, Christian Genest et Jean-François Plante ont recours au concept de forêt aléatoire pour montrer que la combinaison d'un ensemble de modèles simples permet souvent d'obtenir de meilleurs prévisions qu'un modèle complexe.

Dans le dossier *Construction des mathématiques*, Frédéric Gourdeau signe l'article **Une somme qui sème la controverse**. Cet article analyse une vidéo disponible sur Internet dans laquelle on « démontre » que $1 + 2 + 3 + \dots = -1/12$. Peut-on utiliser des séries divergentes en mathématiques? Oui, mais la prudence est de mise lorsqu'on manipule des séries infinies!

Dans **L'information paradoxale**, de la rubrique des paradoxes, Jean-Paul Delahaye nous présente un problème qui est soluble même si on peut penser manquer d'information pour y parvenir.

Bonne lecture!

André Ross

Rédacteur en chef

André Ross

Professeur de mathématiques

Comité éditorial

Pietro-Luciano Buono

*Professeur de mathématiques
University of Ontario Institute
of Technology*

France Caron

*Professeure de didactique
des mathématiques
Université de Montréal*

Christian Genest

*Professeur de statistique
Université McGill*

Frédéric Gourdeau

*Professeur de mathématiques
Université Laval*

Bernard R. Hodgson

*Professeur de mathématiques
Université Laval*

Stéphane Laplante

*Enseignant de mathématiques
Collège de Montréal*

Christiane Rousseau

*Professeure de mathématiques
Université de Montréal*

Robert Wilson

*Professeur de mathématiques
Cégep de Lévis-Lauzon*

Production et Iconographie

Alexandra Haedrich

Institut des sciences mathématiques

Conception graphique

Pierre Lavallée

Néograf Design inc.

Illustrations de scientifiques et caricatures

Noémie Ross

Illustrations mathématiques

André Ross

Révision linguistique

Robert Wilson

*Professeur de mathématiques
Cégep de Lévis-Lauzon*

Accromath

*Institut des sciences mathématiques
Université du Québec à Montréal
Case postale 8888, succ. Centre-ville
Montréal (Québec)
H3C 3P8 Canada*

redaction@accromath.ca
www.accromath.ca

Accromath

Volume 14 • Hiver-printemps 2019

Sommaire

Dossier *Histoire des mathématiques*

Émergence logarithmique : tables et calculs

Jérôme Camiré-Bernier
Bernard R. Hodgson

John Napier

André Ross

Dossier *Applications des mathématiques*

Le théorème des quatre couleurs

Christiane Rousseau

L'union fait la force

Christian Genest
Jean-François Plante

Dossier *Construction des mathématiques*

Une somme qui sème la controverse

Frédéric Gourdeau

Rubrique des **Paradoxes**

L'information paradoxale

Jean-Paul Delahaye

Solution du paradoxe précédent

Jean-Paul Delahaye

Section problèmes

Multiplication

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

2

8

12

18

24

30

31

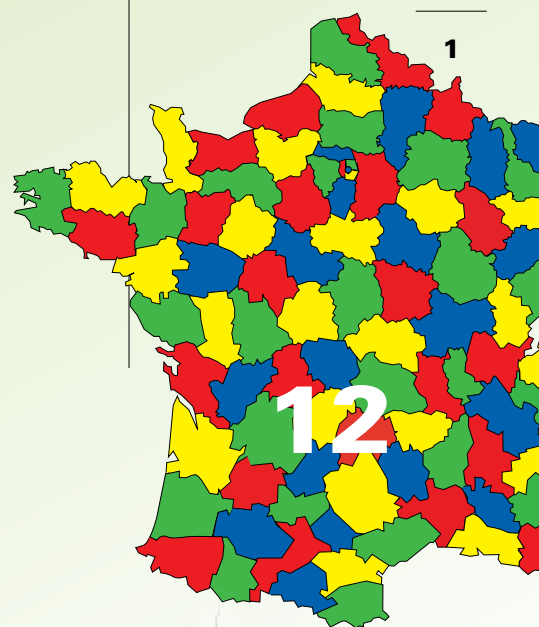
32

2

Vol. 14 • hiver – printemps 2019

Accromath

1



24

18



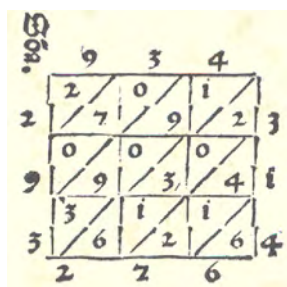
L'idée fondamentale derrière la notion de logarithme est de simplifier les « gros » calculs arithmétiques en transformant, par exemple, la multiplication en une addition. Or le logarithme n'est pas la seule façon qui a été proposée afin de rendre plus aisé le calcul d'un produit.

Émergence logarithmique : tables et calculs

Jérôme Camiré-Bernier
Bernard R. Hodgson
Université Laval

De l'art de la multiplication

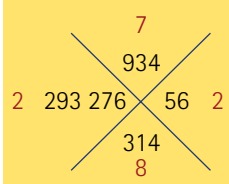
De manière générale, une addition est vue à juste titre, dans la plupart des systèmes de numération, comme une opération plutôt simple à effectuer. Mais il n'en va pas forcément ainsi de la multiplication. Même en se restreignant à des entiers positifs, il ne serait ni judicieux ni efficace de ramener le calcul d'un produit tout bonnement à une série d'additions répétées. C'est ce qui explique la présence au fil des âges de diverses méthodes pour exécuter correctement, voire aisément, une multiplication.



Multiplication par jalousie (1478)

Un cas remarquable est celui de la *multiplication par jalousie*¹, qui a connu une forte popularité lors de la diffusion de l'écriture indo-arabe des nombres, notamment durant la première moitié du deuxième millénaire. Cette méthode repose sur une grille rappelant la forme d'une jalousie et qui vient soutenir les manipulations arithmétiques en cause. Le fonctionnement de la grille est on ne peut plus limpide, comme on peut l'observer sur la figure ci-haut² montrant le calcul du produit de 934 et 314. (Voir aussi la *Section problèmes*.)

Une preuve par neuf



Une technique fort répandue accompagnant souvent un calcul multiplicatif est la *preuve par neuf* (aussi appelée *preuve*

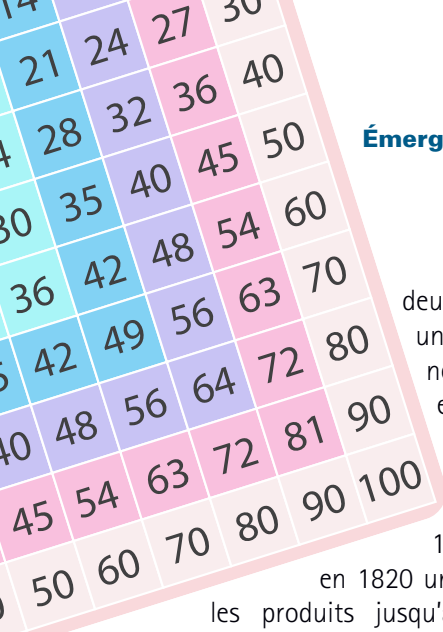
par l'abjection novenaire³), connue des mathématiciens indiens dès l'an mille : afin de valider un résultat, on reprend le calcul « modulo 9 », c'est-à-dire en retranchant autant de fois 9 qu'il est possible de chacun des nombres en jeu — une telle manipulation arithmétique s'exécute très facilement (et par de simples additions) dans notre système de numération en prenant la somme des chiffres de chacun des nombres. Ainsi, revenant au calcul précédent, on voit que les restes du multiplicande 934 et du multiplicateur 314, en divisant par 9, sont respectivement 7 et 8, dont le produit, 56, a lui-même pour reste 2. Or le « candidat-produit » 293 276 a lui aussi pour reste 2 et passe donc le test. Mais cela montre-t-il hors de tout doute qu'il s'agit du produit recherché ? Attention ici aux faux positifs... (Voir à ce propos la *Section problèmes*).

Des tables pour la multiplication

Pour effectuer à la mitaine une multiplication, il faut bien sûr « connaître ses tables », la table de multiplication des nombres de 1 à 9 se retrouvant de ce fait à la base de l'arithmétique dans l'enseignement primaire. (La version montrée à la page suivante, qui a longtemps figuré au dos de cahiers d'exercices, se ramène dans la pratique à la table familière 9×9 à double entrée, dite *table de Pythagore* dans le jargon scolaire.) Certaines tables ont même été publiées donnant explicitement tous les produits de nombres pris

1. De l'italien *gelosia*, de même origine que le mot « jaloux ». Une *jalousie* désigne un volet mobile composé de lattes orientables et parallèles permettant de voir sans être vu.
2. Figure tirée de *L'Arte dell'Abaco*, recueil publié en 1478 et aussi connu sous le nom d'Arithmétique de Trévise.

3. Du latin *abjectio*, « suppression » (de la famille étymologique du mot « jeter »), et *novem*, le nombre « neuf ». Cette expression est utilisée notamment par le mathématicien allemand *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646-1716) dans sa Préface à la Science générale.



deux à deux dans un intervalle donné. Un cas célèbre est dû au mathématicien allemand Leopold Crelle⁴ (1780-

1855), qui a publié en 1820 une table de tous les produits jusqu'à 1000×1000 . Mais ce document de Crelle, il convient de le souligner, fait près de 2000 pages⁵ ! Pas vraiment commode à utiliser...

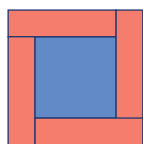
Il y a à peine un siècle, plusieurs voyaient les tables numériques pouvant aider à effectuer une multiplication comme des outils mathématiques utiles et pertinents. Si on dispose par exemple d'une table répertoriant les *nombre triangulaires* – de la forme $T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ pour n un entier positif –, on peut faire appel à une égalité telle

$$ab = T_{a+b} - T_a - T_b$$

(peut-être un brin ésotérique...) pour calculer le produit de deux entiers par addition et soustraction. (Voir la *Section problèmes*.) Une telle approche a effectivement été proposée au 18^e siècle, mais sans grand impact, semble-t-il.

Une autre façon un peu singulière de multiplier deux nombres – dont d'aucuns faisaient la promotion encore vers la fin du 19^e siècle – repose sur l'identité élémentaire

$$4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2,$$



connue depuis fort longtemps (la figure ci-contre en donne une preuve visuelle sans doute d'origine ancienne).

Si on dispose d'une table des carrés, on peut donc obtenir le produit de deux nombres en calculant d'abord leur somme et leur différence, puis en trouvant dans la table les

TABLE MULTIPLICATION TABLE

2 fois 1 font arc 2	3 fois 1 font arc 3	4 fois 1 font arc 4	5 fois 1 font arc 5	6 fois 1 font arc 6	7 fois 1 font arc 7	8 fois 1 font arc 8	9 fois 1 font arc 9	10 fois 1 font arc 10	11 fois 1 font arc 11	12 fois 1 font arc 12
2 - 4	2 - 6	2 - 8	2 - 10	2 - 12	2 - 14	2 - 16	2 - 18	2 - 20	2 - 22	2 - 24
3 - 6	3 - 9	3 - 12	3 - 15	3 - 18	3 - 21	3 - 24	3 - 27	3 - 30	3 - 33	3 - 36
4 - 8	4 - 12	4 - 16	4 - 20	4 - 24	4 - 28	4 - 32	4 - 36	4 - 40	4 - 44	4 - 48
5 - 10	5 - 15	5 - 20	5 - 25	5 - 30	5 - 35	5 - 40	5 - 45	5 - 50	5 - 55	5 - 60
6 - 12	6 - 18	6 - 24	6 - 30	6 - 36	6 - 42	6 - 48	6 - 54	6 - 60	6 - 66	6 - 72
7 - 14	7 - 21	7 - 28	7 - 35	7 - 42	7 - 49	7 - 56	7 - 63	7 - 70	7 - 77	7 - 84
8 - 16	8 - 24	8 - 32	8 - 40	8 - 48	8 - 56	8 - 64	8 - 72	8 - 80	8 - 88	8 - 96
9 - 18	9 - 27	9 - 36	9 - 45	9 - 54	9 - 63	9 - 72	9 - 81	9 - 90	9 - 99	9 - 108
10 - 20	10 - 30	10 - 40	10 - 50	10 - 60	10 - 70	10 - 80	10 - 90	10 - 100	10 - 110	10 - 120
11 - 22	11 - 33	11 - 44	11 - 55	11 - 66	11 - 77	11 - 88	11 - 99	11 - 110	11 - 121	11 - 132
12 - 24	12 - 36	12 - 48	12 - 60	12 - 72	12 - 84	12 - 96	12 - 108	12 - 120	12 - 132	12 - 144

carrés correspondants dont on fait ensuite la différence, que l'on divise finalement par 4. Un processus qui peut sembler complexe, mais plus efficace pour de grands nombres que le calcul du produit directement à la main. Cette méthode de multiplication a été utilisée dès 1690 par le mathématicien allemand Johann Hiob Ludolf (1649-1711) dans son recueil *Tetragonometria tabularia*, une table donnant les carrés des entiers de 0 à 99 999. De fait l'approche proposée par Ludolf, afin de réduire la taille des nombres en jeu, revient plutôt à l'identité équivalente

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

(voir l'encadré *Un calcul à la Ludolf*).

Un calcul à la Ludolf

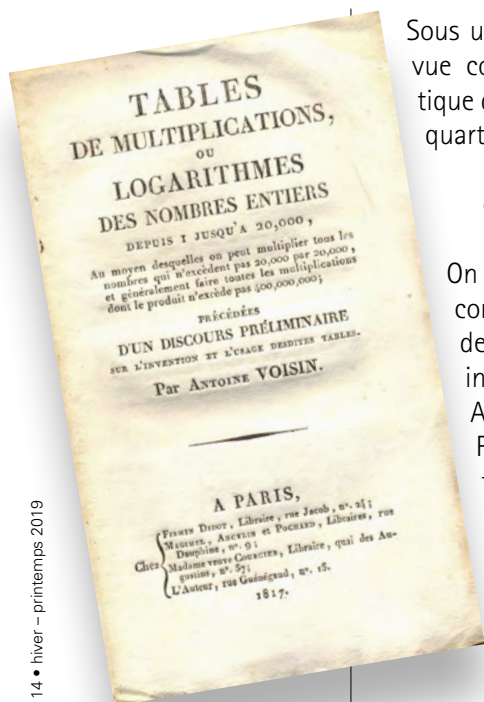
Pour multiplier 89013 par 479,

- on calcule d'abord la somme du multiplicande et du multiplicateur : 89 492;
- on en prend la moitié : $44\,746 = 89\,492/2$, dont on trouve le carré dans la table : 2 002 204 516;
- on soustrait la demi-somme 44 746 du multiplicande : $89\,013 - 44\,746 = 44\,267$, ce qui donne la demi-différence des deux nombres initiaux;
- on prend dans la table le carré de cette demi-différence : 1 959 567 289;
- finalement on trouve la différence des deux carrés : 42 637 227, qui est le produit recherché.

L'exemple qui précède est particulièrement sympathique car les deux facteurs étant de même parité, leur somme et leur différence sont donc paires. Ludolf présente d'autres exemples montrant comment prendre en compte le cas de facteurs de parité différente. (Voir la *Section problèmes*.)

4. Crelle est connu pour avoir fondé à Berlin en 1826 le *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Journal de mathématiques pures et appliquées), une revue de mathématiques très prestigieuse et la plus ancienne encore en existence. On trouve au fil des ans dans le « *Journal de Crelle* » des articles de mathématiciens parmi les plus éminents, notamment Abel, Cantor ou Gauss.

5. Et pourtant Crelle y utilise de nombreux stratagèmes qui allègent considérablement sa table.



Sous un tel angle, la méthode peut être vue comme faisant intervenir en pratique des valeurs numériques qui sont le quart de carrés d'entiers,

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}. \quad (*)$$

On voit ainsi surgir l'intérêt de construire des tables répertoriant de tels nombres, ce qui a été réalisé indépendamment en 1817 par Antoine Voisin (France) et par Anton Philipp Bürger (Allemagne). Le titre du recueil de Voisin est en soi assez remarquable : *Tables de multiplications, ou logarithmes des nombres entiers depuis 1 jusqu'à 20 000, au moyen desquelles on peut multiplier tous les nombres qui n'excèdent pas 20 000, etc.* (voir la figure ci-contre). Remarquable non seulement par sa verbosité – dans le style du temps, il faut le dire – mais surtout par l'emploi (erroné!) du mot

logarithme : les « logarithmes » de Voisin n'ont absolument rien à voir avec cette notion telle qu'on la connaît aujourd'hui et dont il sera question plus bas. Quelques autres « tables de quarts de carrés » furent publiées au cours du 19^e siècle, les plus prolifiques permettant de calculer des produits de nombres jusqu'à 200 000.

Tombée en désuétude aujourd'hui, la *méthode des quarts de carrés* demeure un témoignage historique éloquent quant au défi pratique qu'a pu représenter au fil des âges le calcul d'un produit, même pour des entiers assez modestes. Pouvoir ramener une multiplication à une soustraction de nombres pigés dans une table représente un atout majeur, en termes de la complexité des manipulations à accomplir. Il est frappant à cet égard de voir James Glaisher (1848-1928), théoricien des nombres réputé de l'Université de Cambridge, en faire la promotion en 1889 dans *Nature*, revue scientifique parmi les plus anciennes et les plus renommées (voir *Pour en savoir plus*).

À propos de la méthode des quarts de carrés

S'agissant de l'égalité (*)

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4},$$

notons que si a et b sont deux entiers de même parité, alors leur somme et leur différence sont toutes deux paires, de sorte que les deux termes à la droite de l'égalité sont des entiers. Plus précisément, posant $n = 2k$, on a donc que $\frac{1}{4}n^2 = k^2$. Mais si l'un des nombres est pair et l'autre impair, leur somme et leur différence sont alors impaires. Or pour $n = 2k + 1$, on a $\frac{1}{4}n^2 = k^2 + k + \frac{1}{4}$. Lorsqu'on applique (*), on voit alors que les deux termes fractionnaires vont s'annuler.

Conséquemment il suffit, pour chaque entier positif donné, de connaître l'entier inférieur ou égal au quart de son carré. Autrement dit, une table de « quarts de carrés » répertorie de fait la partie entière de tels nombres, donnée par la fonction $qc(n)$ définie comme suit, pour n un entier positif :

$$qc(n) = \begin{cases} k^2 & \text{si } n = 2k \\ k^2 + k & \text{si } n = 2k + 1. \end{cases}$$

Et cette table est très facile à construire (même si cette construction est clairement fastidieuse pour de grands nombres), car les opérations arithmétiques en cause ne sont que des sommes – l'élévation au carré, ne l'oublions pas, est une somme d'impairs consécutifs :

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$$

(voir la *Section problèmes*). Difficile de demander plus élémentaires comme outils de construction!

La figure de la page suivante présente la liste des quarts de carrés pour les entiers de 301 à 400, tels que donnés dans la table de Voisin. On peut s'en servir pour obtenir le produit 359×36 en effectuant simplement la soustraction des deux entrées correspondant à $359 + 36 = 395$ et à $359 - 36 = 323$:

$$359 \times 36 = 39\,006 - 26\,082 = 12\,924.$$

Bien sûr, les deux facteurs étant de parité différente, la transcription exacte de (*) serait plutôt

$$359 \times 36 = 39\,006,25 - 26\,082,25 = 12\,924.$$

S'intéressant au calcul d'un produit dont on souhaite connaître tous les chiffres, un par un – et non pas simplement un ordre de grandeur –, Glaisher déplore que la méthode des quarts de carrés soit si peu connue. Il insiste notamment sur la légèreté de l'instrument de travail sur lequel elle s'appuie : comme il s'agit d'une table à *simple entrée*, son volume est réduit de manière considérable, comparativement à une table à *double entrée* comme ce serait le cas avec une table de Pythagore usuelle jusqu'à un entier n donné⁶. Il s'étonne par ailleurs qu'il ait fallu attendre le début du 19^e siècle pour disposer de tables de quarts de carrés, étant donné la simplicité tant de la formule algébrique à la base de la méthode que des opérations arithmétiques intervenant dans la construction même de la table – voir à ce sujet l'encadré *À propos de la méthode des quarts de carrés*. (Insistons, concernant ce dernier point, sur le fait que la construction de tables de logarithmes – au sens usuel – est d'un niveau de complexité tout à fait autre. On y revient dans un prochain texte.)

Mais Glaisher réalise pleinement que si les tables de quarts de carrés ont tant tardé, voire failli, à prendre leur essor, c'est en raison de l'arrivée spectaculaire des logarithmes au début du 17^e siècle – épisode qui marqua indéniablement un point tournant dans l'histoire du calcul.

Une autre méthode de calcul qui a connu ses heures de gloire est la *multiplication par prosthaphèrese*⁷. On y fait intervenir des valeurs trigonométriques afin de trouver le produit ou le quotient de deux nombres (voir l'encadré *Une curiosité historique : la prosthaphèrese*). Mais cette méthode est rapidement tombée en désuétude, principalement, là encore, en raison de l'arrivée des logarithmes.

Une mirifique invention

Les développements majeurs survenus au 16^e siècle, dans des domaines tels l'astronomie – sous l'influence du Danois Tycho Brahe (1546-1601) et de l'Allemand Johannes Kepler (1571-1630) – ou encore la navigation, rendaient impérieux le besoin de faciliter l'exécution de calculs longs et compliqués. De meilleurs outils permettant des observations plus fines, il fallait pouvoir en rendre compte aussi bien dans l'efficacité calculatoire que dans la précision des résultats obtenus. Si la prosthaphèrese a pu servir dans un tel contexte, c'est l'introduction par le baron écossais John Napier⁸ (1550-1617) du concept de logarithme⁹, dans son ouvrage *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*¹⁰ (1614), qui vint révolutionner le paysage numérique, et ce de façon durable.

Nous reviendrons dans un prochain texte sur les origines de la notion de logarithme¹¹ et sur l'apport d'autres contributeurs tels Jost Bürgi (1552-1632) ou Henry Briggs (1556-1630), de même que sur la construction de tables de logarithmes, que nous tenons pour acquises dans ce qui suit.

Extrait de la table des quarts de carrés de Voisin (1817)

301	22650	351	30800
302	22801	352	30976
303	22952	353	31152
304	23104	354	31329
305	23256	355	31506
306	23409	356	31684
307	23562	357	31862
308	23716	358	32041
309	23870	359	32220
310	24025	360	32400
311	24180	361	32580
312	24336	362	32761
313	24492	363	32942
314	24649	364	33124
315	24806	365	33306
316	24964	366	33489
317	25122	367	33672
318	25281	368	33856
319	25440	369	34040
320	25600	370	34225
321	25760	371	34410
322	25921	372	34596
323	26082	373	34782
324	26244	374	34969
325	26406	375	35156
326	26569	376	35344
327	26732	377	35532
328	26896	378	35721
329	27060	379	35910
330	27225	380	36100
331	27390	381	36290
332	27556	382	36481
333	27722	383	36672
334	27889	384	36864
335	28056	385	37056
336	28224	386	37249
337	28392	387	37442
338	28561	388	37636
339	28730	389	37830
340	28900	390	38025
341	29070	391	38220
342	29241	392	38416
343	29412	393	38612
344	29584	394	38809
345	29756	395	39006
346	29929	396	39204
347	30102	397	39402
348	30276	398	39601
349	30450	399	39800
350	30625	400	40000

8. Le patronyme Napier a connu différentes graphies, notamment *Naper* et *Neper*.

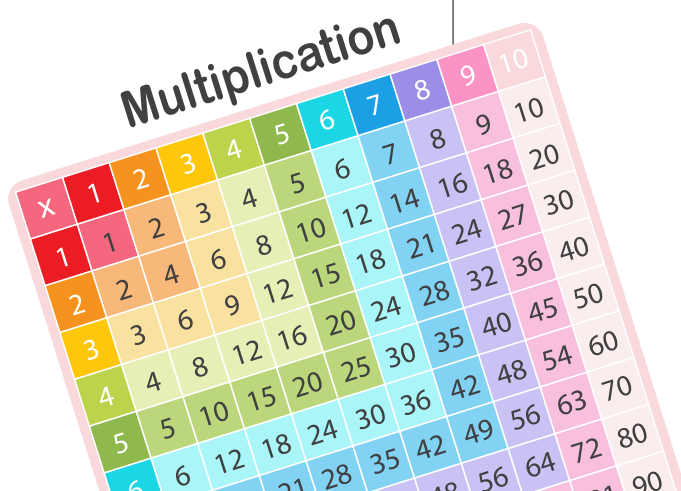
9. Du grec *λογος*, « rapport », et *αριθμος*, « nombre ».

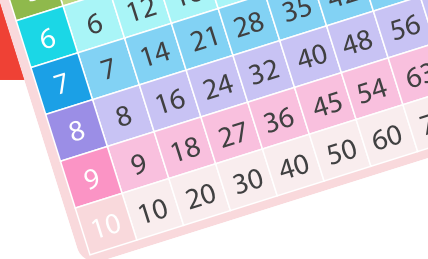
10. C'est-à-dire Description de la merveilleuse règle des logarithmes.

11. À propos de l'origine des logarithmes, voir aussi l'article sur John Napier dans ce numéro.

6. Pour rester dans le type de comparaison que propose Glaisher, on peut observer que la table de Voisin fait un maigre 123 pages, ce qui permet d'effectuer tous les produits de deux nombres dont la somme n'excède pas 20 000. C'est vraiment peu, si on compare avec la volumineuse table de Crelle qui couvre pourtant un intervalle de nombres beaucoup plus restreint.

7. Mot formé à partir du grec *προσθεσις*, « addition », et *αφαιρεσις*, « soustraction », deux étapes intervenant dans l'algorithme.





Une curiosité historique : la prosthaphère

Au 16^e siècle, les développements scientifiques, conjugués à des besoins pratiques notamment en lien avec la navigation, avaient mené à la construction de tables trigonométriques d'une grande précision. C'est dans un tel contexte qu'a surgi l'idée d'utiliser ces tables afin d'exécuter rapidement – mais de manière approximative – des calculs arithmétiques.

Ainsi une identité telle

$2\sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ permet de transformer le calcul d'un produit en celui d'une différence de deux valeurs trigonométriques, dont il s'agira ensuite de prendre la moitié. La recherche du produit de deux nombres positifs a et b – que l'on peut supposer inférieurs à 1 – se fait en identifiant, à l'aide d'une table, des angles α et β tels que $a \approx \sin \alpha$ et $b \approx \sin \beta$, puis en exécutant le calcul sur les valeurs du membre de droite de l'égalité, toujours avec la table à l'appui, pour les angles $\alpha - \beta$ et $\alpha + \beta$ (voir la *Section problèmes*).

La méthode de prosthaphère demeure d'origine un peu floue en raison de divergences quant à la priorité. On sait cependant qu'elle fut régulièrement utilisée vers la fin du 16^e siècle, notamment par l'astronome Tycho Brahe qui s'en servit dès 1582. L'arrivée des logarithmes, une trentaine d'années plus tard, a définitivement relégué au cabinet de curiosités cette étrange façon d'effectuer une multiplication.

Le but premier de ce nouvel outil était de transformer une multiplication en addition et une division en soustraction. Contrairement au contexte d'une multiplication par quarts de carrés (voir ci-haut), son emploi en astronomie ou en navigation visait non pas à connaître le nombre résultant d'un calcul dans sa totalité, chiffre par chiffre, mais plutôt à trouver son ordre de grandeur ainsi qu'une tranche de chiffres significatifs. C'est là le propre de calculs portant sur des nombres découlant de mesures physiques, obtenues selon un certain degré de précision. (Nous passons sous silence ici les règles de l'« arithmétique des chiffres significatifs ».)

Exprimée en notations modernes, l'idée sur laquelle s'appuie le concept de logarithme est de regarder un nombre en lien avec l'exposant dont il faut affecter une certaine « base » donnée pour le retrouver. Plus précisément, un réel b strictement positif et différent de 1 ayant été fixé (la *base*) et considérant un réel positif x , le *logarithme de x dans la base b* , noté $\log_b x$, est par définition l'exposant (unique) u tel que $b^u = x$. De là suit immédiatement la propriété fondamentale des logarithmes : étant donné deux réels (positifs) x et y de logarithme respectif u et v , on a

$$xy = b^u \times b^v = b^{u+v},$$

et donc $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$, tel que désiré. On vérifierait de même des relations analogues pour le logarithme d'un quotient ou d'une puissance.

Calculs logarithmiques

Nous proposons au lecteur un exercice sans doute suranné, mais qui conserve un charme indéniable : la recherche d'un produit à l'aide d'une table de logarithmes. L'occasion, somme toute, d'apprécier un savoir scolaire aujourd'hui disparu mais encore d'importance il y a moins de cinquante ans... Nous utiliserons à cette fin une table de logarithmes de base 10 – appelés dans la littérature *logarithmes décimaux* ou *vulgaires*, ou encore *logarithmes de Briggs*¹². Dans ce qui suit, la notation $\log x$ représente donc $\log_{10} x$. Considérons une valeur particulière de x , par exemple $x = 578$. Il est alors clair que $2 < \log x < 3$. Écrivant x en notation scientifique sous la forme $x = 5,78 \times 10^2$, on a donc

$$\begin{aligned} \log 578 &= \log 5,78 + \log 10^2 \\ &= \log 5,78 + 2. \end{aligned}$$

On voit ainsi que la recherche de $\log 578$ fait intervenir le nombre $\log 5,78$ qui est compris, lui, entre 0 et 1. On aurait de même

$$\begin{aligned} \log 5780 &= \log 5,78 + \log 10^3 \\ &= \log 5,78 + 3, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \log 0,00578 &= \log 5,78 + \log 10^{-3} \\ &= \log 5,78 - 3. \end{aligned}$$

Ces observations sont tout à fait générales : tout réel positif x peut se représenter sous la forme $x = y \times 10^c$ avec y un réel tel que $1 \leq y < 10$ (la virgule décimale de y est alors dite en *position standard*) et c un entier (positif, négatif ou nul). L'exposant c – qui correspond à la partie entière du réel $\log x$ – s'appelle la *caractéristique* de $\log x$, tandis que le réel $\log y$ – la partie décimale de $\log x$ – en est appelé la *mantisse*¹³. (Puisque $1 \leq y < 10$, on a évidemment $0 \leq \log y < 1$.)

12. Par opposition aux logarithmes naturels (parfois dits népériens), de base e .

13. De *mantissa*, mot latin dont la signification exacte n'est pas attestée mais qui est relié à l'idée de « supplément » ou de « surplus » (par exemple surplus de poids). Utilisé par John Wallis dans son *De algebra tractatus* (1693) pour désigner la partie décimale d'un nombre, le mot *mantisse* se retrouve avec son sens moderne dans l'*Introductio in analysin infinitorum* de Leonhard Euler (1748).

La recherche du logarithme d'un réel x donné porte donc essentiellement sur la recherche de sa mantisse, de sorte qu'une table de logarithmes (dans les faits, une « table de mantisses ») peut se restreindre à des réels entre 1 et 10. Mais selon le degré de précision visé, il est souvent plus commode de voir les nombres comme des entiers allant de 100 à 1000 (on considère alors des nombres ayant trois chiffres significatifs – cette table était fréquemment utilisée dans l'enseignement secondaire)¹⁴, ou encore de 1000 à 10 000 (avec quatre chiffres significatifs). De plus les logarithmes eux-mêmes pourront être précis à quatre positions décimales (cas encore une fois fréquent dans l'enseignement secondaire), ou à cinq décimales¹⁵.

La figure ci-contre montre un extrait d'une table de logarithmes à quatre positions décimales pour des nombres à trois chiffres significatifs (donc entre 100 et 1000). On y lit entre autres que $\log 5,78 = 0,7619$, d'où on tire immédiatement que $\log 578 = 2,7619$ et $\log 5780 = 3,7619$. Quant à $\log 0,00578$, on obtient bien sûr

$$\log 0,00578 = 0,7619 - 3,$$

que l'on serait peut-être tenté d'écrire comme $-2,2381$. Mais l'usage montre qu'il vaut mieux dans ce contexte conserver les mantisses positives, de sorte que l'on ferait plutôt appel à une notation telle $\bar{3},7619$ pour représenter ce logarithme.

Par exemple, si on s'intéresse au produit $p = 59 \times 0,00578$, on trouve

$$\begin{aligned} \log p &= \log 59 + \log 0,00578 \\ &= 1,7709 + \bar{3},7619 \\ &= (1 + \bar{3}) + (0,7709 + 0,7619) \\ &= \bar{2} + 1,5328 \\ &= \bar{1},5328. \end{aligned}$$

14. Tout nombre inférieur à 100 a un logarithme de même mantisse que son produit par 10 ou 100 – qui sera alors un nombre entre 100 et 1000 –, selon que le nombre est entre 10 et 100 ou entre 1 et 10.

15. Des tables de logarithmes à six, voire sept, positions décimales étaient d'usage relativement courant.

16. Voir Marie Beaulieu et Bernard R. Hodgson, *Accromath*, vol. 10, hiver-printemps 2015, p. 23.

Extrait d'une table de logarithmes
(mantisses à quatre positions décimales)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917

On voit alors que p est l'antilogarithme de $\bar{1},5328$, c'est-à-dire le nombre dont le logarithme est $\bar{1},5328$. La caractéristique de ce log nous donne la puissance de 10 en cause : 10^{-1} . Quant à sa mantisse, la vie est parfois généreuse : on lit ici directement, en parcourant la table utilisée pour ce calcul, que $\log 3,41 = 0,5328$, de sorte que $p = 0,341$ (en se ramenant à trois chiffres significatifs).

Mais il arrivera souvent que la mantisse obtenue lors d'un calcul ne figure pas comme telle dans la table : il faut dans ce cas recourir à des techniques d'interpolation linéaire entre deux valeurs de la table pour obtenir l'antilogarithme recherché (voir la *Section problèmes*).

Et la calculatrice vint...

Pendant plus de 350 ans, les tables de logarithmes – et leur pendant instrumental, la règle à calcul¹⁶ – ont été abondamment utilisées. Savoir effectuer un calcul à l'aide de ces tables figurait de ce fait au programme de l'école secondaire. Si l'arrivée des calculatrices, au milieu des années 1970, a rendu un tel apprentissage totalement obsolète, il demeure néanmoins pertinent de garder en mémoire le rôle que ces outils ont joué dans le développement des mathématiques et leur mise en application.

Une (autre) curiosité historique : les bâtons de Napier

On doit aussi à John Napier une méthode élémentaire pour ramener une multiplication à des additions : les *bâtons de Napier*. Son idée est de reproduire sur des réglettes la table de multiplication de chaque nombre à un chiffre, et de se servir de cet outil comme support pour le calcul. C'est un peu comme si on travaillait avec une jalousie à une seule ligne. Un produit se trouve alors par une série d'additions simples où on n'a qu'à gérer les positions des produits partiels l'un par rapport à l'autre – voir à ce propos l'article sur John Napier dans le présent numéro.

André Ross
Professeur retraité

Théologien, physicien, astronome et mathématicien écossais, John Napier est né en 1550 à Merchiston, près d'Édimbourg. Il est mort au même endroit en 1617. Issu d'une riche famille, il est, comme son père, baron de Merchiston. On sait qu'il est entré à l'université de St-Andrews à l'âge de 13 ans, mais il n'a pas reçu de diplôme de cette institution. On pense qu'il est allé poursuivre sa formation sur le continent européen, peut-être à Paris ou en Italie.

Aujourd'hui, Napier est surtout reconnu pour avoir inventé les logarithmes mais, pour ses contemporains, Napier est un théologien protestant qui craint les agissements de Philippe, roi catholique d'Espagne. Il soupçonne celui-ci de conspirer avec le pape pour envahir l'Écosse et conquérir ensuite la Grande-

Bien que les mathématiques ne soient pas son activité principale, il a établi quelques formules de trigonométrie sphérique (*analogies de Napier*) et popularisé l'usage du point pour la notation anglo-saxonne des nombres décimaux.

L'avènement des logarithmes

Napier était préoccupé par le fait que le progrès scientifique était difficile à cause des calculs fastidieux que suppose toute recherche scientifique et plus particulièrement les calculs en trigonométrie sphérique, indispensables en astronomie. Il a consacré ses énergies au développement de méthodes permettant de simplifier les calculs.

C'est en 1614 que Napier fit paraître son traité *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*

John Napier



John Napier
1550-1617

John Napier a d'abord étudié en théologie avant d'acquérir une formation en mathématiques. Pour alléger les procédures de calcul des produits, quotients, racines et puissances, il a inventé les logarithmes et a conçu les *réglettes* ou *batônnets de Napier*.

Bretagne toute entière. Napier met en garde le roi Jacques VI d'Écosse contre toute collusion avec l'ennemi.

En 1593, Napier rédige *A Plaine Discovery of the Whole Revelation of Saint John*¹ dans lequel il fait une analyse du *Livre de la Révélation* en condamnant vivement l'Église de Rome et faisant même du pape l'antéchrist de l'*Apocalypse*. Cet ouvrage lui vaut une certaine réputation jusque sur le continent auprès des protestants.

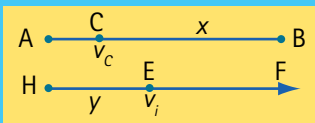
1. Le Livre de la Révélation, également appelé Apocalypse de Jean est le dernier livre du Nouveau Testament. Il dévoilerait des choses qui avaient été cachées et la prédiction d'événements dont plusieurs ne se sont pas encore produits.

(Description de la merveilleuse règle des logarithmes²) qui décrit son système de logarithmes. Il y indique que deux considérations l'ont amené à l'invention des logarithmes. La relation entre une progression arithmétique et une progression géométrique³ est la première de ces considérations.

2. L'ouvrage est rédigé en latin, langue des sciences de l'époque. Étant donné l'importance de cet ouvrage, il fut rapidement traduit en anglais pour une diffusion plus large.

3. Cette relation avait été étudiée par Michaël Stifel (1486-1567), mais celui-ci n'avait pas eu l'idée de calculer des correspondances suffisamment denses pour pouvoir utiliser efficacement cette relation.

La deuxième considération est celle des points mouvants. Il considère un segment de droite AB de longueur 10^7 et une demi-droite HF de longueur infinie. Un point C et un point E partent simultanément de A et H respectivement. La vitesse initiale de C est 10^7 , mais elle diminue progressivement pour être en tout temps égale à la longueur CB . La vitesse du point E est constante et égale à 10^7 .



La démarche de la construction des tables de logarithmes⁴ tel qu'imaginés par Napier est décrite dans l'ouvrage *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, publiée à titre posthume en 1619.

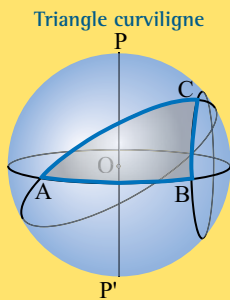
La découverte des logarithmes a, comme le souhaitait Napier, grandement allégé le temps à consacrer aux calculs.



4. Voir dans ce numéro Émergence logarithmique : tables et calculs.

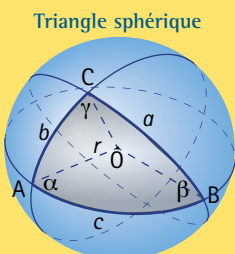
Trigonométrie sphérique

La trigonométrie sphérique est l'étude des relations entre les angles et les côtés dans un *triangle sphérique*. Un triangle sphérique est une portion de la surface d'une sphère limitée par les arcs de trois de ses grands cercles, c'est-à-dire des cercles ayant le même centre que la



sphère. Les côtés du triangle sphérique sont donc des portions d'arcs de grands cercles. Il est à noter qu'un triangle sur une sphère n'est pas toujours sphérique, si au moins un de ses côtés n'est pas une portion d'un arc de grand cercle, il est dit *triangle curviligne*.

Dans la figure du bas, A, B et C, points d'intersection de trois grands cercles, sont les sommets d'un triangle sphérique. On note α , β et γ , les angles du triangle aux sommets A, B et C, respectivement. On note a , b et c les angles sous-tendus au centre O de la sphère par la



partie de grand cercle correspondante. Ainsi, a désigne l'angle BOC, b désigne l'angle AOC et c , l'angle AOB. Les longueurs des côtés sont obtenues en multipliant les mesures en radians des angles a , b et c par le rayon de la sphère.

Les relations en trigonométrie sphérique sont analogues à celles de la trigonométrie euclidienne. Ainsi, en trigonométrie euclidienne, la relation des sinus s'écrit :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

et en trigonométrie sphérique elle s'écrit :

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

Dans son *De Variorum* publié en 1593, François Viète donne l'importante loi des cosinus :

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

qui relie la longueur d'un côté à celles des deux autres côtés ainsi qu'à l'angle entre eux.

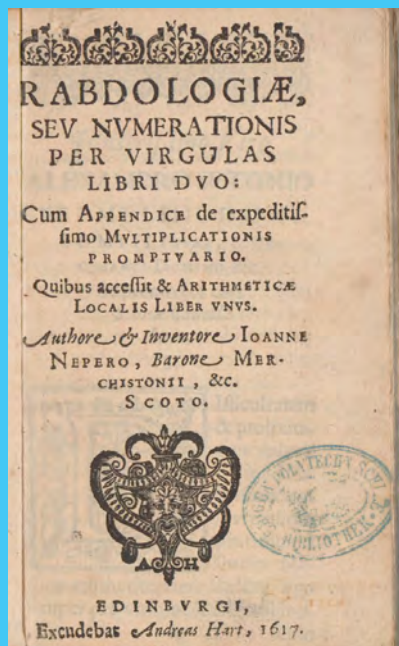
Les *analogies de Napier*, expressions plus élaborées, s'écrivent :

$$\tan \frac{c}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \tan \frac{a + b}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$\tan \frac{c}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \tan \frac{a - b}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$\cot \frac{\gamma}{2} \cos \frac{a - b}{2} = \tan \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{a + b}{2},$$

$$\cot \frac{\gamma}{2} \sin \frac{a - b}{2} = \tan \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{a + b}{2}.$$



Bâtons de Napier

En 1617, Napier publie *Rabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo* (Deux livres sur la rhabdologie⁵ et sur la numération avec virgules). Il y présente un abaque, appelé maintenant *bâtons* ou *réglettes de Napier*, pour faciliter le calcul des produits, quotients, puissances et racines.

Les réglettes sont divisées en neuf cases. La case supérieure porte un chiffre de 0 à 9. Les huit autres cases sont divisées en deux par un trait diagonal. Sur chaque réglette est portée la table de multiplication du nombre qui apparaît sur la case supérieure.

apparaît sur la case supérieure.

L'abaque comporte un plateau à rebord sur lequel peuvent être placées les réglettes gravées. Le bord gauche du plateau est gravé lui aussi et divisé en neuf cases numérotées de 1 à 9.

On dispose sur le plateau les réglettes représentant l'opération à effectuer de telle sorte que celle-ci se ramène à de simples additions. Considérons les réglettes 4 et 7, illustrées ci-contre et disposons celles-ci dans le plateau. Effectuons la somme de chacune des diagonales apparaissant sur la ligne 3. La première diagonale à droite ne comporte que le chiffre 1. La deuxième diagonale donne $2 + 2 = 4$. Dans la troisième, on a encore un seul chiffre, 1. Les trois chiffres obtenus forment le nombre 141, soit 3×47 .

Sur la ligne 7, la première diagonale ne comporte que le chiffre 9, la seconde comporte les chiffres 8 et 4 dont la somme est 12. On conserve 2 en deuxième position et on reporte une unité dans la diagonale suivante qui donne $2 + 1 = 3$. On obtient 329, soit 7×47 . Si on considère la ligne 8, la première diagonale à droite donne 6. La somme des chiffres

5. Du grec *ραβδος* (*baguette*) et *λογος* (*science*). Dans cet ouvrage, il explique comment utiliser des bâtonnets pour effectuer des calculs; il présente aussi la notation décimale actuelle des nombres décimaux, au lieu de la notation fractionnaire, soit 2,8 au lieu de $2 \frac{4}{5}$.

$4 \times 1 =$	4
$4 \times 2 =$	0 8
$4 \times 3 =$	1 2
$4 \times 4 =$	1 6
$4 \times 5 =$	2 0
$4 \times 6 =$	2 4
$4 \times 7 =$	2 8
$4 \times 8 =$	3 2
$4 \times 9 =$	3 6
$7 \times 1 =$	7
$7 \times 2 =$	1 4
$7 \times 3 =$	2 1
$7 \times 4 =$	2 8
$7 \times 5 =$	3 5
$7 \times 6 =$	4 2
$7 \times 7 =$	4 9
$7 \times 8 =$	5 6
$7 \times 9 =$	6 3

1	4	7	
2	0 8	1 4	
3	1 2	2 1	141
4	1 6	2 8	
5	2 0	3 5	
6	2 4	4 2	
7	2 8	4 9	329
8	3 2	5 6	376
9	3 6	6 3	

de la deuxième diagonale donne 7 et la troisième 3, soit $376 = 8 \times 47$.

Pour obtenir le résultat du produit 378×47 , on écrit le résultat du produit par le nombre d'unités du multiplicateur, 8, et on décale vers la gauche d'une colonne pour le résultat du produit par le chiffre des dizaines, 7, puis par le chiffre des centaines, 3. En additionnant ces nombres, on obtient 17 766 soit le produit 378×47 .

1	4	7		
2	0 8	1 4		
3	1 2	2 1	141	
4	1 6	2 8		
5	2 0	3 5		
6	2 4	4 2		
7	2 8	4 9	329	
8	3 2	5 6	376	
9	3 6	6 3	17766	

Pour effectuer le produit

$$7\,035 \times 384,$$

on dispose dans l'ordre les réglettes 7, 0, 3 et 5 et on détermine les chiffres des produits par 3, par 4 et par 8 en additionnant les chiffres des diagonales à partir de la colonne de droite.

1	7	0	3	5	
2	1 4	0 0	0 6	1 0	
3	2 1	0 0	0 9	1 5	21105
4	2 8	0 0	1 2	2 0	28140
5	3 5	0 0	1 5	2 5	
6	4 2	0 0	1 8	3 0	
7	4 9	0 0	2 1	3 5	56280
8	5 6	0 0	2 4	4 0	
9	6 3	0 0	2 7	4 5	

Il reste à disposer les nombres obtenus en plaçant d'abord le résultat du produit par le nombre des unités et on décale vers la gauche d'une colonne pour le résultat du produit par le chiffre des dizaines, puis par le chiffre des centaines. Il ne reste qu'à effectuer la somme.

$$\begin{array}{r}
 28\ 140 \\
 562\ 80 \\
 \hline
 2\ 110\ 5 \\
 2\ 701\ 440
 \end{array}$$

On obtient $7035 \times 384 = 2\ 701\ 440$.

Et la jalousie ?

Conceptuellement, l'utilisation des réglettes de Napier pour effectuer une multiplication se compare à la *multiplication par jalousie* (voir à ce propos l'article *Émergence logarithmique : tables et calculs* dans ce numéro). La multiplication de 934 par 314 à l'aide des réglettes donne :

1	9	3	4					934
2	18	06	08					2802
3	27	09	12					3736
4	36	12	16					293276
5	45	15	20					
6	54	18	24					
7	63	21	28					
8	72	24	32					
9	81	27	36					

La ligne 4 représente le produit de 934 par le chiffre des unités. La ligne 1 représente le résultat de la multiplication par le chiffre des dizaines – on décale donc ce nombre d'une colonne vers la gauche. La ligne 3 représentant le résultat de la multiplication par le chiffre des centaines, on décale ce nombre de deux colonnes vers la gauche. Il reste à additionner pour obtenir le résultat de la multiplication, soit 293276.

Dans la multiplication par jalousie, on écrit seulement les lignes des chiffres du multiplicateur 314. Soit dans l'ordre les lignes 3, 1 et 4 des réglettes 9, 3 et 4. Ce qui donne :

	9	3	4	
2	27	09	12	3
0	09	03	04	1
3	36	12	16	4

On additionne ensuite en suivant les diagonales à partir de celle du bas à droite. Lorsque la somme des chiffres d'une diagonale est supérieure à 9, on reporte la retenue dans la somme de la diagonale suivante. On obtient :

	9	3	4				
2	2	7	0	9	1	2	3
9	0	9	0	3	0	4	1
3	3	6	1	2	1	6	4
	2	7	6				

On remarque que ces deux façons de procéder utilisent la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition, soit :

$$\begin{aligned}
 934 \times 314 &= 934 \times (300 + 10 + 4) \\
 &= 934 \times 300 + 934 \times 10 + 934 \times 4.
 \end{aligned}$$

Division

Pour diviser 1342 par 47, on dispose dans l'ordre les réglettes du diviseur et on peut lire directement les produits du diviseur par les chiffres de 1 à 9.

Le diviseur est plus grand que la tranche des deux premiers chiffres du dividende, on considère la tranche des trois premiers chiffres, soit 134. Les réglettes permettent de lire que $2 \times 47 = 94$ est le plus grand multiple de 47 inférieur à 134. Le premier chiffre du quotient est 2 et on soustrait 94 de la tranche des trois premiers chiffres, ce qui donne 40. On abaisse le chiffre restant et on obtient 402. Le plus grand multiple de 47 inférieur à 402 est 376, soit 8×47 . Le deuxième chiffre du quotient est 8 et on soustrait 376 de 402. On obtient un reste de 26.

On pourrait aussi poursuivre le calcul afin d'exprimer le reste sous forme décimale. On vérifierait ainsi qu'à trois décimales près, le quotient est 28,253.

Ces exemples illustrent comment utiliser les réglettes dans des cas simples. Cependant, elles permettraient d'alléger les calculs sur des nombres beaucoup plus grands que ceux de ces exemples. Elles permettraient également d'extraire des racines; nous y reviendrons dans un prochain numéro.

1	4	7				
2	08	14				94
3	12	21				141
4	16	28				188
5	20	35				235
6	24	42				282
7	28	49				329
8	32	56				376
9	36	63				423

Étape 1

$$\begin{array}{r}
 1342 \quad | \quad 47 \\
 - 94 \quad 2 \\
 \hline
 402
 \end{array}$$

Étape 2

$$\begin{array}{r}
 1342 \quad | \quad 47 \\
 - 94 \quad 28 \\
 \hline
 402 \\
 - 376 \\
 \hline
 26
 \end{array}$$

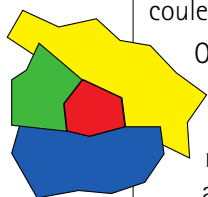
De combien de couleurs a-t-on besoin au minimum pour colorier n'importe quelle carte géographique, avec la contrainte que deux pays partageant une frontière commune doivent être coloriés de couleur différente ?

Le théorème des quatre couleurs affirme que quatre couleurs suffisent. Ce théorème a été prouvé en 1976 par Kenneth Appel et Wolfgang Haken : à l'époque c'était le premier théorème prouvé à l'ordinateur. Et maintenant, au 21^e siècle, il continue à fasciner les mathématiciens.

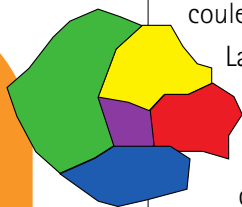
LE THÉORÈME DES

Christiane Rousseau
Université de Montréal

Dans tout atlas géographique, on utilise plusieurs couleurs pour colorier les pays. Et on utilise une couleur différente pour les lacs et les océans. Quel est le nombre minimal de couleurs dont on a besoin ?



On va oublier la contrainte d'utiliser la même couleur pour les lacs et les océans que l'on va simplement regarder comme des régions à colorier au même titre que les pays. La première portion de carte à gauche nous montre immédiatement qu'il faut au moins quatre couleurs.

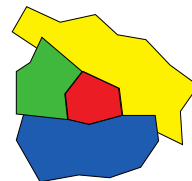


La seconde portion de carte est coloriée avec cinq couleurs. On peut bien sûr changer le rouge pour du vert et n'en utiliser que quatre ! Et supposons que cette carte représente une île. On pourrait alors colorier l'océan qui l'entoure en violet et n'utiliser que quatre couleurs. Oui, mais est-ce encore possible si ces cinq pays forment une portion d'une carte plus grande avec beaucoup d'autres pays ?

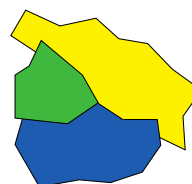
Montrer que quatre couleurs suffisent pour colorier une carte est un problème très difficile. Historiquement, on a commencé par montrer que six couleurs suffisent. On a raffiné ensuite la preuve pour montrer que cinq couleurs suffisent. Suivirent, coup sur coup, deux preuves erronées que quatre couleurs suffisent, la première, par Kempe, en 1879, et la seconde, par Tait, en 1880. Même si ces preuves se sont avérées erronées, elles contiennent des idées très profondes qui conduiront à la preuve de Appel et Haken en 1976.

La grande idée de la preuve

Supposons que le théorème des quatre couleurs ne soit pas vrai. Alors il existe une carte dont le coloriage requiert au moins cinq couleurs. Prenons alors une *carte minimale* dont le coloriage requiert cinq couleurs. Si on construit une carte avec moins de pays dont le coloriage requiert encore cinq couleurs on obtient une contradiction et on a gagné.



Prenons un exemple. La carte ne peut contenir une région comme celle ci-contre. En effet, si la grande carte a besoin d'une cinquième couleur, par exemple le orange, c'est parce que le reste de la carte utilise aussi le rouge. Sinon on pourrait changer le rouge pour du orange et utiliser quatre couleurs. Dans cette carte si j'enlève le pays rouge central j'obtiens une carte plus petite qui a besoin de cinq couleurs !

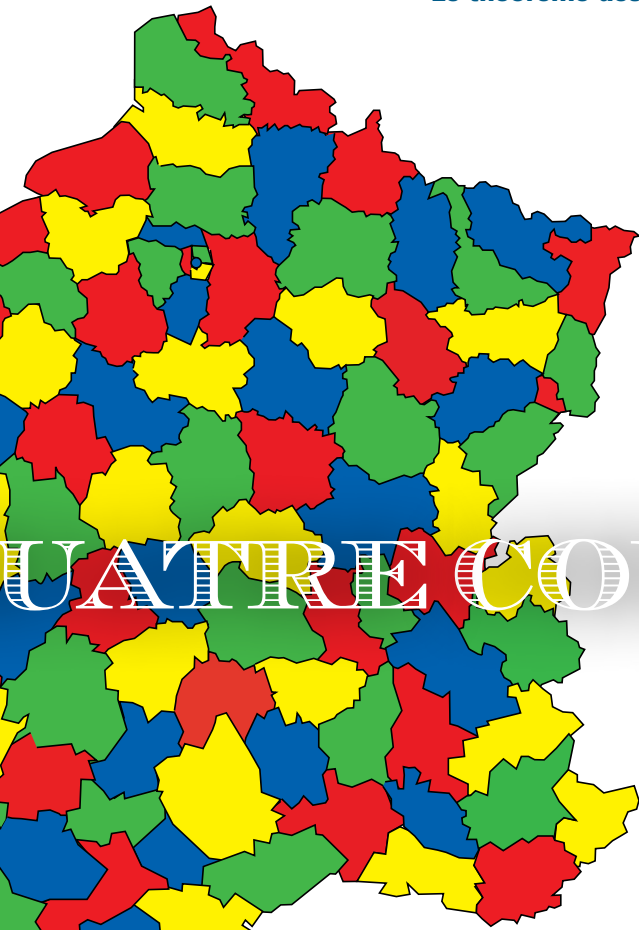


On va dire que la région est *réductible*.

Toute l'essence de la preuve du théorème des quatre couleurs revient à montrer que toute carte dont le coloriage nécessiterait cinq couleurs contient une région réductible. Pour systématiser cette démarche, il faut modéliser la carte.

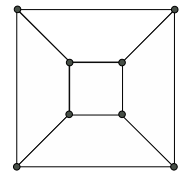
Modéliser une carte par un graphe

De nombreux problèmes mathématiques peuvent se modéliser par un graphe. Dans le cas du coloriage d'une carte, on la modélise par un *graphe planaire*. Les sommets sont les



QUATRE COULEURS

morceaux de carte qui ne se touchent pas, on choisit la couleur du fond et on colorie indépendamment les deux morceaux. On veut montrer que toute carte dont le coloriage nécessiterait cinq couleurs contient une région réductible. Quelles sont ces régions réductibles ? On va utiliser le fait que dans le graphe d'une carte :



au moins une face n'a pas plus de cinq arêtes.

Ceci suit de la formule d'Euler pour les graphes planaires connexes (voir encadré). Avant de s'attaquer au coloriage à quatre couleurs, regardons celui à six couleurs, puis celui à cinq couleurs.

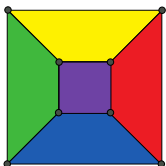
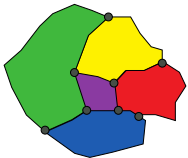
Toute carte peut être coloriée avec six couleurs

Appliquons la grande idée. S'il existe une carte qui ne peut être coloriée avec six couleurs, alors il existe une *carte minimale* qui ne peut être coloriée avec six couleurs. Cette carte contient un pays qui n'a pas plus de cinq frontières et qu'on peut donc facilement colorier avec six couleurs.

Enlevons ce pays comme sur la deuxième figure et on obtient une carte plus petite qui ne peut être coloriée avec six couleurs. Contradiction.



points où au moins trois frontières se rejoignent, les arêtes sont les morceaux de frontière entre les sommets. Comme le graphe est dans un plan, les arêtes séparent les faces. Les illustrations à gauche montrent comment modéliser une carte par un graphe. Colorier la carte revient à colorier les faces.



Dans le problème des quatre couleurs, il suffit de se limiter à des graphes *connexes*, c'est-à-dire en un seul morceau. En effet, si on a deux

La formule d'Euler pour les graphes planaires connexes

Étant donné un graphe planaire connexe, soit S son nombre de sommets, A , son nombre d'arêtes et F , son nombre de faces (incluant la face infinie). Alors, on a la formule

$$S - A + F = 2. (*)$$

On appelle *degré d'un sommet* le nombre d'arêtes issues de ce sommet. Sous l'hypothèse que chaque sommet a au moins degré 3 (ce qui est le cas dans le graphe d'une carte), une conséquence de la formule d'Euler, est que :

$$3S \leq 2A.$$

En effet, chaque sommet est attaché à au moins trois arêtes et chaque arête est partagée par deux sommets.

D'où

$$S \leq \frac{2}{3}A.$$

En remplaçant dans (*), cela donne

$$F - \frac{A}{3} \geq 2. (**)$$

Si toutes les faces étaient limitées par au moins six arêtes on aurait,

$$6F \leq 2A,$$

puisque'une arête est partagée par deux faces. D'où

$$F - \frac{A}{3} \leq 0.$$

Contradiction avec (**). Donc, il existe une face qui a au plus cinq arêtes.



Toute carte peut être coloriée avec cinq couleurs

Appliquons encore la grande idée ! Supposons qu'il existe une carte qui ne peut être coloriée avec cinq couleurs. Prenons alors une carte minimale qui ne peut être coloriée avec cinq couleurs. Comme ci-contre, il existe un pays qui a au plus cinq frontières, et concentrons-nous sur le cas où il a exactement cinq frontières.

Sur la figure, on voit que le pays bleu et le pays jaune ne se touchent pas. Unifions-les avec le pays central.

Cette carte a moins de pays que la précédente, qui était une carte minimale ne pouvant être coloriée avec cinq couleurs. Donc, comme cette carte est plus petite, elle peut être coloriée avec cinq couleurs (ce n'est pas nécessairement le même coloriage qu'avant). Mais seulement quatre couleurs ont été utilisées pour colorier les pays adjacents à l'ancien pays central. Il reste donc une couleur qu'on peut attribuer à ce pays.

Pour une deuxième fois, on a identifié une région *réductible* et on a pu se ramener à un problème de coloriage d'une carte plus petite.

Mais, est-on sûr qu'il y a toujours deux pays qui ne partagent pas une frontière commune ?

Oui !

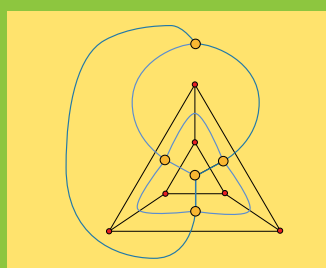
Cela demande d'introduire un nouvel outil : le *graphe dual* d'un graphe (voir encadré).

Colorier une carte avec quatre couleurs ?

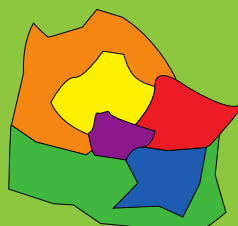
On utilise encore la même idée. On suppose que ce n'est pas possible. On prend une carte minimale qui ne peut pas être coloriée avec quatre couleurs et on cherche une carte plus petite non coloriable avec quatre couleurs. On sait que cette carte a une face qui a moins de cinq arêtes. Il y a trois cas à considérer, selon que la face a trois, quatre ou cinq arêtes. On a déjà vu ci-dessus que le cas d'une face à trois arêtes est réductible.

Grphe dual d'un graphe planaire

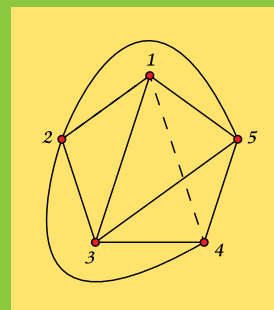
Partons d'un graphe planaire. Son *graphe dual* est construit ainsi : on associe un sommet à chaque face et on met une arête entre deux sommets si les deux faces du graphe initial partagent une arête.



Appliquons cela au graphe de notre carte :

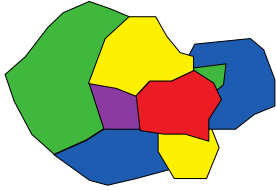


Si les cinq pays qui entourent le pays violet partageaient deux à deux une frontière, le graphe dual serait un *graphe complet* à cinq sommets (les cinq pays), c'est-à-dire un graphe dans lequel chaque paire de sommets est reliée par une arête. Mais, il est connu que le graphe complet à cinq sommets est non planaire comme on peut s'en convaincre aisément en regardant la figure : il n'y a plus moyen de tracer une arête entre les sommets 1 et 4 qui ne coupe pas les autres arêtes.

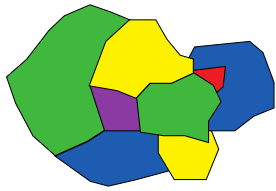


Si la face à quatre arêtes, il faut travailler un peu plus.

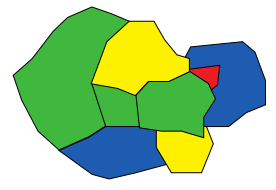
Regardons la carte suivante :



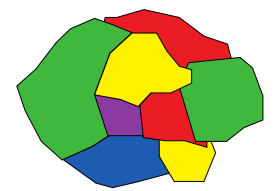
On voit que le rouge et le vert à droite sont isolés. On peut donc les échanger.



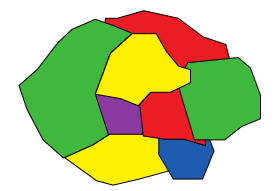
On peut maintenant enlever le pays central en le fusionnant avec les deux pays verts : on a donc une configuration réductible !



Mais que faire, s'il y a une chaîne alternant entre le rouge et le vert et joignant les voisins rouge et vert du pays violet ?



On remarque que cette chaîne isole le jaune en haut du bleu en bas. On peut alors échanger le jaune et le bleu en bas dans toute la chaîne qui les joint.



De nouveau, on peut fusionner le pays central avec les deux pays jaunes : la configuration est encore réductible.

Et si la face a cinq arêtes ?

On vu plus haut l'idée de *chaîne*. Cette idée très puissante a été introduite par Alfred Kempe, et il l'a utilisée en 1879 pour traiter le cas de la face à cinq arêtes et annoncer la preuve du théorème des quatre couleurs. Malheureusement, sa preuve contenait une erreur...

Le théorème des quatre couleurs

Toutes les idées de la preuve de Kenneth Appel et Wolfgang Haken sont là. Ils supposent qu'il existe une carte qui ne peut être coloriée avec quatre couleurs. Ils prennent alors une telle carte minimale. On a vu ci-dessus des exemples de configurations réductibles. L'essence de la preuve est de montrer que toute carte doit contenir une configuration réductible. Mais, le nombre de configurations réductibles à analyser est très grand, si bien que seul un ordinateur peut venir à bout de les analyser. La preuve de Appel et Haken comprend de montrer que toute carte doit contenir au moins une configuration réductible parmi une liste de 1478 configurations réductibles et, bien sûr, de montrer que ces 1478 configurations sont bien réductibles.

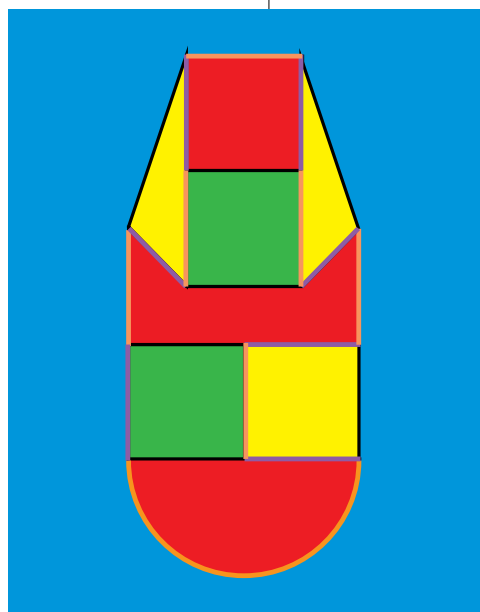
Un regain d'intérêt pour le théorème des quatre couleurs

Les mathématiciens n'ont pas abandonné l'espoir qu'il puisse exister une preuve du théorème des quatre couleurs sans recourir à l'ordinateur. En 1880, Peter Guthrie Tait avait aussi publié une preuve qui s'est révélée erronée. Mais, la première partie de sa preuve établit une équivalence entre le théorème des quatre couleurs et un problème de *tricoloriage* des arêtes d'un graphe planaire *sans pont* (voir encadré) dont tous les

sommets sont de degré 3. C'est ce problème de coloriage d'arêtes qui fascine plusieurs mathématiciens. En particulier, dans leur conférence plénière au Congrès international des mathématiciens de 2018, Peter Kronheimer et Tomasz Mrowka ont annoncé de nouveaux théorèmes de topologie algébrique qui permettront, espèrent-ils, de donner une preuve du problème équivalent de tricoloriage des arêtes d'un graphe sans recours à l'ordinateur.

L'équivalence de Tait

Première étape : pour montrer que le théorème des quatre couleurs est vrai, il suffit de se limiter à des cartes sans pont dont tous les sommets sont de degré 3 (voir encadré).



Supposons qu'on puisse colorier la carte avec quatre couleurs, rouge (R), bleu (B), jaune (J) et vert (V). Montrons que cela permet de donner un tricoloriage des arêtes, c'est-à-dire un coloriage des arêtes avec trois couleurs, orange, violet et noir, de telle sorte que les trois arêtes associées à chaque sommet soient de couleur différente.

Il y a trois manières de diviser les quatre couleurs en deux ensembles

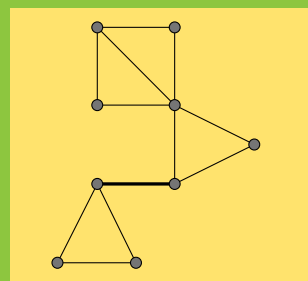
de deux couleurs. On peut avoir :

- I. R, B et V, J;
- II. R, J et B, V;
- III. R, V et B, J

Si l'arête est entre deux faces du groupe I, on la colorie en orange ; si elle est entre deux faces du groupe II, on la colorie en violet ; et si elle est entre deux faces du groupe III on la colorie en noir. Réciproquement, supposons qu'on ait un tricoloriage des arêtes du graphe. Alors, on peut donner à une des faces une couleur arbitraire et, de proche en proche, colorier les autres faces de la seule couleur possible compatible avec la couleur

Les graphes de l'équivalence de Tait

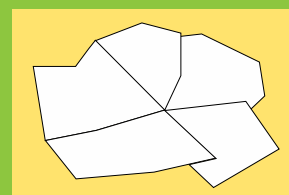
Un graphe est *sans pont* si on ne peut le rendre non connexe en coupant une seule arête. Voici un graphe avec pont : si on coupe l'arête en trait plus épais on obtient un graphe non connexe.



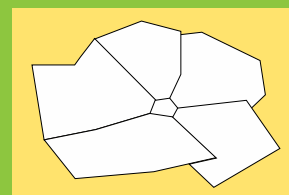
Le graphe d'une carte est toujours sans pont.

Aussi, pour montrer le théorème des quatre couleurs il suffit de se limiter à des cartes dont tous les sommets sont de degré 3.

En effet, supposons qu'on ait un sommet de degré supérieur à 3.



Si on ajoute un petit pays au dessus du sommet de degré supérieur à 3, alors les nouveaux sommets sont de degré 3, et si on a un coloriage à quatre couleurs de la nouvelle carte, cela nous donne un coloriage à quatre couleurs de l'ancienne carte.

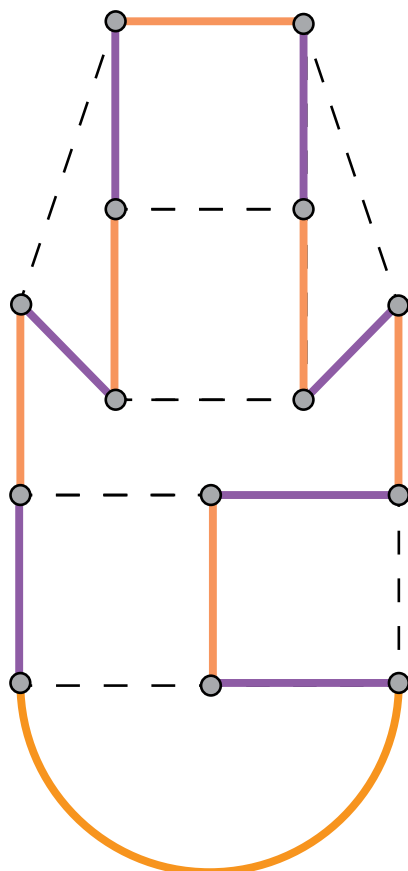


des arêtes. On peut se convaincre que ceci donnera un coloriage à quatre couleurs de la carte initiale.

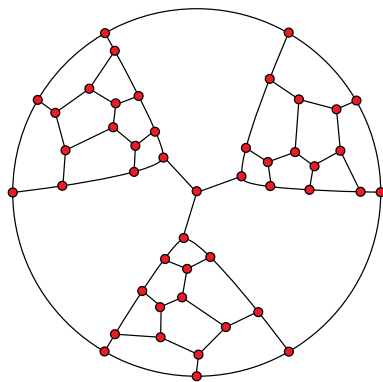
Ainsi montrer le théorème des quatre couleurs devient équivalent à montrer que, pour tout graphe planaire sans pont dont tous les sommets sont de degré 3, il existe un tricoloriage des arêtes du graphe.

Voyons que cette dernière propriété est vraie si le graphe possède un *circuit hamiltonien*, c'est-à-dire un chemin fermé formé d'une suite d'arêtes qui passe exactement une fois par chaque sommet : voir le chemin orange et violet sur la figure. Remarquons que ce circuit a alors un nombre pair de sommets. En effet, comme chaque sommet est de degré 3, on a $2A = 3S$. Donc, 2 divise S . Le circuit hamiltonien lui-même a exactement S arêtes, soit un nombre pair d'arêtes. Alors, on colorie les arêtes du circuit en alternance avec deux couleurs, et on colorie les arêtes restantes avec la troisième couleur. On peut aussi colorier directement la carte. On utilise en alternance deux couleurs à l'intérieur du circuit hamiltonien et deux couleurs à l'extérieur.

Tait a conjecturé que tout graphe sans pont



dont tous les sommets sont de degré 3 a un circuit hamiltonien. Cette dernière conjecture est fautive. Voici un exemple de graphe à 46 sommets de degré 3 qui n'a pas de circuit hamiltonien. Pourtant, on peut colorier ses arêtes avec trois couleurs.



Existe-t-il une preuve qui ne nécessite pas le recours à l'ordinateur ?

Un tel débat est lancé dans la communauté mathématique chaque fois qu'elle est confrontée à une preuve par l'ordinateur. Dans le cas du théorème des quatre couleurs, il existe d'autres preuves assistées par ordinateur et la communauté ne doute pas que le théorème est vraiment prouvé. Mais, beaucoup de mathématiciens continuent à croire qu'il doit être possible de donner une preuve « classique » du théorème des quatre couleurs, sans recours à l'ordinateur. Par contre, il faut une idée nouvelle. C'est ce qu'ont proposé Peter Kronheimer et Tomasz Mrowka dans leur conférence au Congrès international des mathématiciens de 2018 : soit d'utiliser leurs nouveaux théorèmes de topologie algébrique pour montrer que le problème équivalent de coloriage des arêtes d'un graphe avec trois couleurs est possible. Nous verrons si leur approche sera fructueuse.

Une autre preuve par ordinateur très célèbre est celle par Thomas Hales de la conjecture de Kepler sur l'empilement des sphères, affirmant que l'empilement le plus dense est celui qu'on observe sur les étals d'oranges.¹

1. Voir « Quel est l'empilement le plus dense ? », Accromath 13.1, 2018

Comme dit le proverbe, *l'union fait la force*. Cette vérité maintes fois éprouvée sur les champs de bataille, en politique, en affaires et en amour, s'applique également en statistique. Comme nous allons l'illustrer au moyen du concept de forêt aléatoire, la combinaison d'un ensemble de modèles simples permet souvent d'obtenir de meilleures prévisions que l'emploi d'un seul modèle, aussi complexe et sophistiqué soit-il.

L'union fait la force

Christian Genest
Université McGill

Jean-François Plante
HEC Montréal

« Les diamants sont éternels »

Roméo a récemment rencontré la femme de ses rêves et il veut la demander en mariage. Pour respecter des traditions qui lui sont chères, il désire lui offrir un diamant. En consommateur averti, il cherche d'abord à se renseigner sur les prix et les facteurs qui les influencent. Il déniche pour ce faire un fichier décrivant les principales caractéristiques et le prix de 53 940 diamants.

Dans cet échantillon, le prix moyen d'un diamant est de 3 932,80\$. Toutefois, les prix varient beaucoup. Pour mesurer la dispersion de données x_1, \dots, x_n autour de leur moyenne

$$m = (x_1 + \dots + x_n)/n,$$

on calcule généralement la variance expérimentale, soit

$$s^2 = \{(x_1 - m)^2 + \dots + (x_n - m)^2\}/(n - 1)$$

ou encore sa racine carrée, s , appelée l'écart-type. Dans le cas présent, Roméo trouve $s = 3\,989,44\$$ et $s^2 = 15\,915\,629\2 . L'écart-type est donc du même ordre de grandeur que la moyenne, ce qui est le signe d'une très grande fluctuation dans les prix.

Classe	Effectif	Prix moyen
0,2 carat ou moins	12	386,17 \$
0,2 à 0,4 carat	14 379	739,60 \$
0,4 à 0,6 carat	10 057	1 466,49 \$
0,6 à 0,8 carat	6 963	2 641,42 \$
0,8 à 1 carat	5 027	4 243,70 \$
1 à 1,5 carat	12 060	6 513,53 \$
1,5 à 2 carats	3 553	11 321,77 \$
Plus de 2 carats	1 889	14 951,25 \$

Tableau 1.
Prix moyen des diamants en fonction de leur masse en carats. Les intervalles sont ouverts à gauche et fermés à droite.

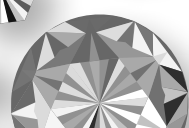
Pourquoi les prix varient-ils autant ?

Si les prix fluctuent tant, c'est que les caractéristiques des diamants sont différentes, à commencer par leur taille, mesurée en carats (un carat équivaut à 200 mg). En regroupant ses données en classes comme au tableau 1, Roméo constate en effet que le prix moyen d'un diamant augmente en fonction de son nombre de carats.

Pour voir dans quelle mesure le nombre de carats d'un diamant permet d'en prédire le prix, supposons un instant que chaque diamant se vende au prix de sa classe, tel qu'indiqué au tableau 1. Autrement dit, supposons que tous les diamants de 0,2 carat ou moins se vendent 386,17\$, que tous ceux qui font entre 0,2 et 0,4 carat se vendent 739,60\$, etc. Ceci n'affecterait pas le prix moyen d'un diamant, qui serait encore de 3 932,80\$, comme on peut s'en rendre compte en calculant la moyenne pondérée des données du tableau 1. Toutefois, la variance serait alors de 13 416 227 \$². Ce modèle de prévision du prix d'un diamant permettrait donc d'expliquer

$$13\,416\,227 / 15\,915\,629 = 84,3\%$$

de la variation totale. Pas mal, mais comme on va le voir dans la suite, on peut faire mieux.



Construire de meilleures classes

Lorsqu'il a construit le tableau 1, Roméo a créé ses classes arbitrairement. Il s'en est bien tiré, mais son modèle est perfectible. Une bonne manière de l'améliorer, fréquemment employée en pratique, consiste à procéder de façon itérative en maximisant à chaque étape le pourcentage de variance expliquée.

Dans un premier temps, Roméo scindera son échantillon en deux parties C_1 et C_2 selon que le nombre de carats est inférieur ou supérieur à un nombre c . En se servant d'un ordinateur, il trouvera la valeur de c pour laquelle le tableau résultant (qui compte alors deux lignes) explique le plus grand pourcentage possible de la variation totale. Puis, les classes C_1 et C_2 seront elles-mêmes scindées en deux selon le même critère. Ces scissions se feront aux points c_1 et c_2 , respectivement. L'approche sera ensuite répétée une troisième fois, ce qui définira au final huit classes, comme c'était le cas au tableau 1. La différence est que cette fois, le choix des classes aura été effectué selon un critère bien précis plutôt qu'au petit bonheur la chance.

Cette procédure itérative peut être résumée graphiquement par une arborescence comme celle de la figure 1, dans laquelle les branches se prolongent de nœud en nœud jusqu'aux feuilles. Chaque feuille représente une classe à laquelle est rattaché un prix. Le tableau 2 correspondant permet d'expliquer 86,7% de la variance totale, alors que le tableau 1 n'en expliquait que 84,3%.

En termes mathématiques, le modèle de prévision ainsi créé s'exprime comme une combinaison linéaire de variables indicatrices. En effet, si x représente la masse d'un diamant en carats, alors le prix est déterminé par la formule en encadré :

$$\text{Prix} = 781,80 \cdot I_{[0,0,465[}(x) + 1\,675,05 \cdot I_{[0,465; 0,625[}(x) + \dots + 14\,834,69 \cdot I_{[1,915; +\infty[}(x)$$

où $I_A(x)$ est une variable qui vaut 1 ou 0 selon que la masse x en carats d'un diamant donné se trouve ou non dans l'intervalle A . On dit que c'est un *arbre de régression*. Le terme régression est justifié car la formule servant à prédire le prix est une somme pondérée de variables explicatives. Toutefois, ces variables ne prennent ici que les valeurs 0 et 1 au lieu d'être continues.

Classe	Effectif	Prix moyen
Moins de 0,455 carat	17 289	781,80 \$
0,455 à 0,625 carat	7 498	1 675,05 \$
0,625 à 0,865 carat	7 255	2 714,34 \$
0,865 à 0,995 carat	2 838	3 938,64 \$
0,995 à 1,175 carat	9 011	5 672,81 \$
1,175 à 1,495 carat	3 814	7 243,42 \$
1,495 à 1,915 carats	4 051	10 872,79 \$
1,915 carat ou plus	2 184	14 834,69 \$

Tableau 2.
Prix moyen des diamants en fonction de leur masse en carats. Les intervalles sont ouverts à droite et fermés à gauche.

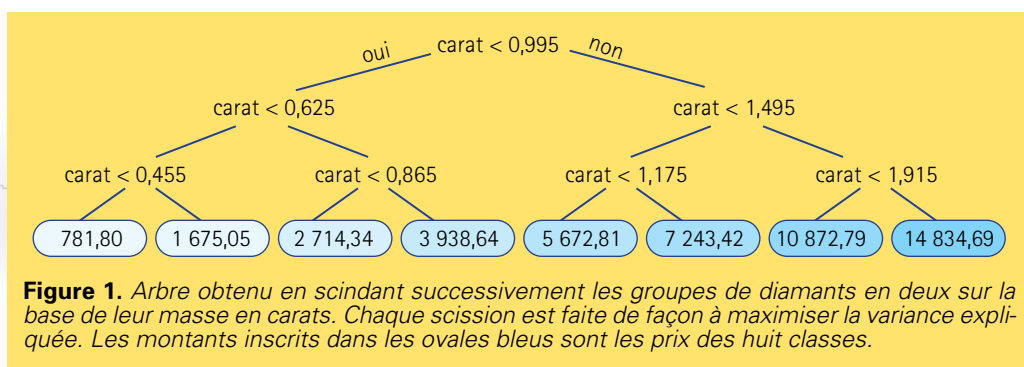
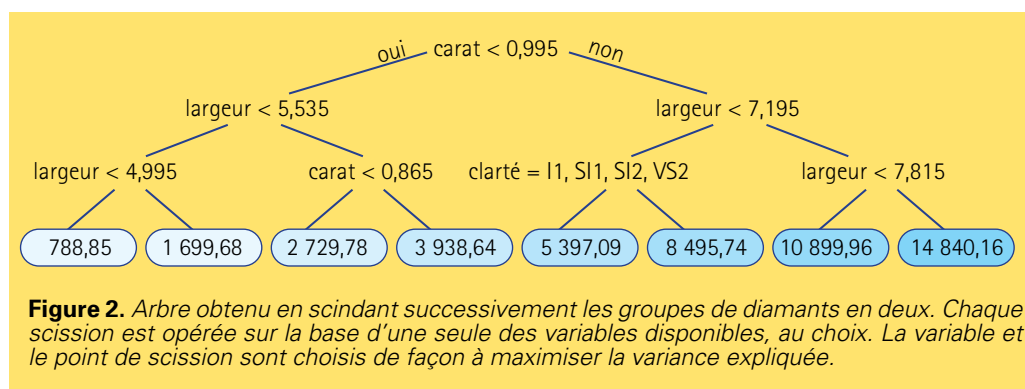


Figure 1. Arbre obtenu en scindant successivement les groupes de diamants en deux sur la base de leur masse en carats. Chaque scission est faite de façon à maximiser la variance expliquée. Les montants inscrits dans les ovals bleus sont les prix des huit classes.

Améliorer le modèle en y incorporant d'autres variables

Évidemment, il n'y a pas que le nombre de carats qui sert à fixer le prix d'un diamant. On peut penser par exemple à la clarté, la couleur et la coupe des diamants, ainsi qu'à leurs dimensions (longueur, largeur et profondeur) mesurées en millimètres. Comme toutes ces informations sont disponibles dans le jeu de données de Roméo, il pourrait songer, à chaque fois que vient le moment de scinder une classe en deux, à le faire sur la base de la caractéristique, au choix, qui permet de maximiser le pourcentage de variance expliquée.



En procédant ainsi, Roméo obtiendra un modèle statistique plus complexe, comme celui qui est représenté par l'arborescence de la figure 2. Dans ce modèle, la clarté d'un diamant est une caractéristique jugée importante pour en déterminer le prix s'il fait 0,995 carat ou plus et si sa largeur est inférieure à 7,195 mm. En revanche, seule la largeur et le poids jouent un rôle dans la prévision du prix d'un diamant de moins de 0,995 carat. Grâce à ce modèle, on peut dorénavant expliquer 88,9 % de la variance totale. On a donc encore gagné en efficacité, passant de 86,7 % (au tableau 2) à 88,9% d'explication de la variance totale.

Évaluer un modèle de prévision

Dans le but d'accroître encore la proportion de variance expliquée par son modèle, Roméo pourrait considérer des arbres à 16 feuilles, à 32 feuilles, et ainsi de suite. En poursuivant la démarche à l'ultime, chaque feuille de son arbre représenterait éventuellement un seul diamant et 100 % de la variance observée dans

son jeu de données serait alors expliquée. À première vue, ça semble idéal mais c'est aussi dire que le prix de chaque diamant dépend alors de manière unique de ses propriétés. Or au départ, le modèle visait à permettre d'identifier les principales caractéristiques des diamants qui en déterminent le prix. Si on le complexifie à l'extrême, il finira certes par se coller de très près aux données. Ce faisant, l'utilité de ce modèle risque cependant d'être limitée lorsqu'il s'agira de prédire le prix de futurs diamants car il reflétera moins les points communs à tous les diamants que la spécificité de ceux qui ont été utilisés pour sa construction.

Afin d'évaluer la valeur de son modèle comme outil de prévision, Roméo doit donc le valider sur des données qui n'ont pas servi à son élaboration. Pour y arriver, il n'est pas nécessaire de trouver de nouvelles données. Il suffit de n'utiliser qu'une partie du jeu de données initial dans la phase de construction du modèle ; on peut alors procéder à son évaluation avec les données restantes.

Supposons par exemple qu'après avoir tenu compte de son budget, Roméo décide de concentrer son attention sur les 6042 diamants dont la masse varie entre 1 et 1,05 carat. Il en choisit 1 500 au hasard et les met de côté à des fins de validation. Les 4542 autres diamants constitueront l'échantillon d'apprentissage qui lui servira à élaborer son modèle.

L'objectif de Roméo étant de prédire au mieux la valeur marchande d'un diamant en fonction de ses propriétés, il mesure l'erreur quadratique moyenne (EQM) de prévision, définie par

$$EQM = \frac{1}{1500} \sum_{i=1}^{1500} (\text{prévision}_i - \text{prix}_i)^2,$$

c'est-à-dire la moyenne du carré entre la prévision du prix d'un diamant fournie par le modèle et le prix avéré. Plus l'EQM est petite, plus le modèle est précis. Lorsque le calcul de l'EQM n'est effectué qu'avec les données d'apprentissage, il correspond à la portion non expliquée de la variation totale. Pour référence, l'EQM du meilleur modèle obtenu jusqu'ici par Roméo était de $1774\,211\ \2 , soit environ $100,0\% - 88,9\% = 11,1\%$ de $15\,915\,629\ \2 .

Après avoir déterminé son arbre de régression au moyen des données d'apprentissage, Roméo s'en sert pour prédire la valeur de chaque diamant de l'échantillon de validation en fonction de ses caractéristiques. Chacune de ces prévisions est ensuite comparée au véritable prix du diamant correspondant. Lorsqu'il est amené à choisir entre deux modèles, Roméo peut ainsi comparer leur performance et opter pour celui qui conduit à la plus petite EQM.

Élagage d'arbres

Les arbres construits jusqu'ici comptaient tous huit feuilles, mais ce nombre était arbitraire. On pourrait complexifier l'arborescence en lui ajoutant des branches. Pour déterminer le nombre optimal de feuilles, on peut se servir de l'EQM calculée sur l'échantillon de validation (1 500 diamants). La figure 3 montre la progression de l'EQM en fonction de la complexité de l'arbre, telle que mesurée par son nombre f de feuilles. La courbe en noir est calculée au moyen de l'échantillon de validation (1 500 diamants), alors que la courbe en rouge est obtenue à partir de l'échantillon d'apprentissage (4 542 diamants). La figure 3 montre que les deux courbes décroissent rapidement jusqu'aux environs de $f = 50$ feuilles. Noter que sur le graphique, les courbes n'ont été tracées que pour $f \geq 10$. Par la suite, l'EQM calculée à partir de l'échantillon d'apprentissage (en rouge) continue à chuter, donnant faussement l'impression que le modèle ne cesse de s'améliorer. En revanche, l'EQM calculée au moyen de l'échantillon de validation (en noir) atteint un plateau correspondant à la zone dite de « sur-apprentissage », dans laquelle

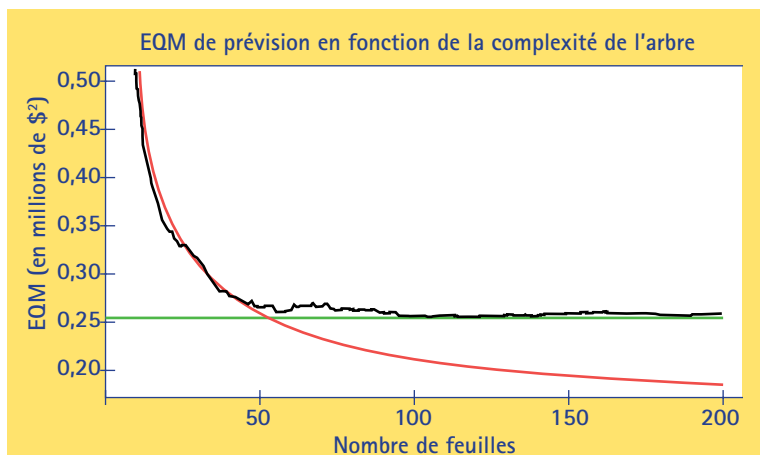


Figure 3. EQM de prévision en fonction du nombre de feuilles dans un arbre prédisant le prix des diamants de 1 à 1,05 carat en se servant de leurs autres caractéristiques. L'EQM calculée sur l'échantillon de validation est tracée en noir. Son minimum, représenté par une ligne verte, est atteint à 105 feuilles. L'EQM calculée sur les données d'apprentissage est tracée en rouge.

l'ajout de classes continue de complexifier le modèle sans en améliorer la valeur prédictive. Alors que la courbe rouge est décroissante, la courbe noire atteint un minimum en $f = 105$ feuilles ; sa valeur, qui est alors de $253\,696\ \2 , est indiquée par une ligne verte. En principe, c'est cette solution que Roméo retiendrait, car c'est alors qu'il dispose du modèle de prévision le plus performant en termes de simplicité et de précision. Au-delà de ce seuil, le sur-apprentissage produit des modèles dont la performance se dégrade.

Les quatre C des diamants

La qualité d'un diamant dépend de quatre caractéristiques :

- Carat : Le poids en carat du diamant.
- Coupe : Il existe différentes coupes de diamant, mais la qualité de cette coupe est également un enjeu puisqu'un diamant taillé selon des proportions idéales réfléchira davantage de lumière.
- Clarté : Un diamant peut contenir des impuretés. Selon leur nombre et leur taille, le diamant se voit attribuer une classe telle que VS_1 ou I_3 .
- Couleur : Plus un diamant est clair, plus il est recherché. Les lettres de l'alphabet sont utilisées pour coder sa coloration. Jusqu'à F, le diamant est incolore. À partir de N, une teinte jaune est perceptible.

Forêts aléatoires

Sans mentionner à Juliette qu'il est en train de se renseigner sur le prix des diamants, Roméo lui fait part de son forage de données. Sa dulcinée lui demande alors pourquoi il s'astreint à choisir un seul modèle. Elle qui croit énormément au travail d'équipe lui fait valoir qu'en mettant leurs connaissances en commun, ses collègues de bureau parviennent souvent à générer de bien meilleures solutions qu'un seul individu. « Pourquoi alors ne pas mettre à profit les prévisions de plusieurs modèles ? », demande-t-elle.

Pas bête, mais quand bien même Roméo appliquerait son algorithme plusieurs fois aux mêmes données, il obtiendra le même modèle à tous les coups ! Pour générer une diversité salutaire, il doit donc introduire un élément de hasard dans la construction de ses arbres, comme la nature le fait si bien avec le vivant. Après consultation, il envisage alors deux façons de procéder :

- i) Chacun des arbres sera construit à partir d'un échantillon d'apprentissage différent, un échantillon artificiel constitué à partir des données de départ en pigeant au hasard des éléments de l'ensemble avec remise (il y a donc un petit risque qu'un même diamant y apparaisse plus d'une fois, mais c'est sans conséquence). De cette manière, ces jeux de données artificiels auront la même distribution que les données originales, mais les modèles qu'on en tirera seront différents.
- ii) À chaque étape de construction du modèle, la scission d'une classe ne pourra être basée, disons, que sur trois des huit variables explicatives disponibles. De plus, ces trois variables seront choisies au hasard à chaque étape.

En appliquant les stratégies i) et ii) simultanément à plusieurs reprises, disons 500 fois, Roméo obtient une multitude d'arbres de régression offrant chacun une prévision de prix légèrement différente pour chaque nouveau diamant. C'est ce qu'on appelle une *forêt aléatoire*. Sa prévision finale sera alors obtenue en faisant la moyenne des prévisions.

La validation croisée

Même à l'ère des méga-données, il arrive que les fichiers de données disponibles soient de petite taille et qu'il soit mal avisé d'en consacrer une partie à la validation. Dans pareil cas, on peut recourir à la validation croisée. Pour choisir entre un arbre à huit feuilles et une régression linéaire sans sacrifier de données, par exemple, on peut :

1. Diviser l'échantillon aléatoirement en $P = 10$ parties à peu près égales.
2. Utiliser à tour de rôle chacune des dix parties comme échantillon de validation et les neuf autres pour l'apprentissage.
3. Dans chaque cas, noter l'EQM obtenue, ce qui donne dix valeurs d'EQM pour chacun des deux modèles.

4. Calculer l'EQM moyenne pour chaque modèle. Utiliser cette valeur pour identifier le meilleur modèle.
5. Une fois le meilleur modèle identifié, utiliser toutes les données pour l'ajuster.

Avec la validation croisée, les données d'apprentissage ne servent jamais à mesurer la performance et le modèle final a le bénéfice de s'appuyer sur toute l'information disponible.

Bien que la valeur de P soit en principe arbitraire, on prend très souvent $P = 5$ ou 10 dans la pratique. Quand P est égal à la taille de l'échantillon, la méthode porte le nom de « jackknife ».

Si l'intuition de Juliette est bonne, la performance de cette forêt devrait être supérieure à celle du meilleur arbre. Et de fait, Roméo trouve une EQM d'environ 237 930 \$², soit une valeur qui est 6,2% plus petite que celle obtenue avec le meilleur arbre. Bien sûr, si Roméo répète l'exercice, la nouvelle forêt aléatoire qu'il engendrera sera forcément différente de la première, ce qui conduira vraisemblablement à des résultats quelque peu différents, mais comparables.

Méthodes d'ensemble

Il y a, dit-on, plus d'idées dans deux têtes que dans une. C'est ce qui a motivé les chercheurs en apprentissage automatique à développer les forêts aléatoires et autres méthodes d'ensemble. Pour que l'approche soit viable, il faut bien sûr disposer de moyens informatiques conséquents.

Lorsqu'elle s'appuie exclusivement sur la procédure i), la stratégie décrite plus haut est appelée « bagging », pour « bootstrap aggregating ». Elle peut être appliquée à n'importe quel modèle et bien qu'elle ne soit pas infaillible, elle permet souvent d'obtenir d'excellents résultats.

Le « boosting » est une autre méthode d'ensemble populaire. Plutôt que de construire des modèles en parallèle, on commence par en ajuster un. Puis, on cherche à l'améliorer en faisant appel à d'autres modèles pour réduire l'erreur de prévision.

Même s'il n'y a à ce jour que peu ou pas de résultats mathématiques garantissant l'optimalité des méthodes d'ensemble, on constate qu'en pratique, elles sont souvent très performantes. De nombreux chercheurs tentent actuellement d'en percer les mystères.

À quoi ça sert?

Dans la vie de Roméo et Juliette, les méthodes d'ensemble joueront encore bien des rôles. Quand ils achèteront en ligne des éléments de décoration pour leur nid d'amour, les entreprises de commerce électronique feront appel à des modèles de « gradient boosting » pour associer les produits les plus pertinents aux mots clés de leurs recherches. De même, lorsqu'ils partageront leurs photos de mariage, des modèles de forêts aléatoires imbriqués dans l'architecture des réseaux sociaux détermineront sur quels serveurs en sauvegarder des copies en fonction de la probabilité que des amis de provenances géographiques et de milieux variés veuillent les télécharger. De plus, l'historique de navigation des tourtereaux pourrait avoir une incidence sur les taux que paieront les entreprises spécialisées dans l'industrie du mariage pour afficher leurs services sur la toile et sur les messages publicitaires que leur adresseront les agences de voyage.

Au fil du temps, des outils de prévision de plus en plus perfectionnés contribueront sans doute à faciliter la vie de Roméo et Juliette, et la nôtre. Mais comme les événements récents l'ont montré, la surveillance généralisée de nos moindres faits et gestes comporte aussi des pièges. Espérons que nous aurons collectivement la sagesse de les éviter.

Leo Breiman (1928-2005)

Le regretté statisticien Leo Breiman (1928-2005) est considéré comme l'un des pionniers des forêts aléatoires. Il a grandement contribué à développer les méthodes d'ensemble en général. Il est l'auteur du livre « Classification and Regression Trees » dont une réédition est parue en 2017. Il est reconnu pour avoir contribué à rapprocher la statistique et l'apprentissage machine. Il a décrit les différences qu'il percevait entre ces deux cultures scientifiques dans un article paru en 2001 (voir *Pour en savoir plus*).

Depuis quelques années, des démonstrations éclatantes que $1 + 2 + 3 + \dots = -1/12$ ont fait leur apparition sur le web. Celles-ci ne sont pas nouvelles. Pourtant, leur diffusion à si grande échelle a semé le doute. Qu'en est-il? Est-ce que la somme des entiers naturels peut vraiment donner $-1/12$?

Une somme qui sème la controverse

Frédéric Gourdeau
Université Laval

Une série surprenante

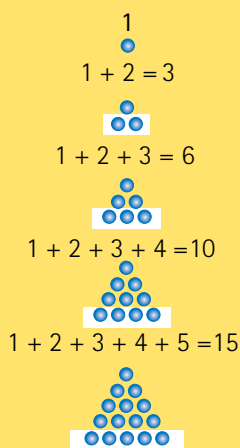
On travaille avec des séries infinies très souvent. Elles sont au cœur de notre système de numération, se cachant derrière les développements décimaux, comme cela est expliqué dans l'encadré «Sommer des séries infinies: un jeu d'enfant». La somme des entiers positifs ne semble pas pouvoir donner un nombre, et encore moins un nombre négatif. Lorsque l'on considère la série

1 = 1
1 + 2 = 3
1 + 2 + 3 = 6
1 + 2 + 3 + 4 = 10
1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28
...

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots,$$

et que l'on fait la somme en ajoutant un terme à la fois, on obtient les résultats de l'illustration ci-contre, qui sont connus sous le nom de *nombre triangulaire*.

Nombres triangulaires



Intuitivement, il est difficile de se convaincre que la somme des entiers puisse converger vers $-1/12$.

Il semble bien évident que cela va croître, sans limite. Au fond, tout cela paraît bien simple, et les vidéos qui démontrent le contraire ne seraient donc que fabulation. On dira informellement que la valeur de la série est infinie, ou plus correctement que la série est divergente. Voilà qui est terminé.

En fait, bien qu'il soit correct de vouloir terminer ici, on sent le besoin d'en dire un peu plus. D'une part, une des vidéos les plus visionnées dans laquelle on «prouve» que

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -1/12$$

a été produite par une partie de l'équipe de la chaîne YouTube Numberphile, qui compte plus

de 2,6 millions d'abonnés. L'équipe qui produit ces vidéos jouit d'une forte crédibilité : elle compte de nombreux collaborateurs de talents, a produit de nombreuses excellentes vidéos, et est financée par le très sérieux Mathematical Sciences Research Institute (MSRI).

De plus, le scientifique dans la vidéo est un professeur de physique de l'Université de Nottingham. Alors, lorsque dans la vidéo, le professeur en question dit que

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -1/12,$$

en affirmant de plus qu'il en fait la preuve, et qu'il affirme qu'il faut accepter que notre intuition soit erronée, on peut être ébranlé. Un professeur de physique qui nous explique que dans la réalité la somme de tous les naturels, tous ensemble, est vraiment $-1/12$, cela peut laisser songeur. Et si c'était vrai?

Une série à l'histoire surprenante

En cherchant un peu, on se rend compte que d'autres ont associé la valeur $-1/12$ à cette série. Il en est ainsi de Ramanujan et, semble-t-il, de Euler lui-même. De plus, on peut lire que la valeur de $-1/12$ associée à la série $1 + 2 + 3 + \dots$ est au cœur de la théorie des cordes, nécessaire à sa cohérence en dimension 26. (La théorie des cordes est un modèle qui a pour objet d'unifier les diverses théories en physique, et des physiciens réputés travaillent dans ce domaine.) Alors, la question qui se pose devient un peu différente. On peut se demander ce qui se cache derrière cette série, et en particulier derrière la valeur proposée de $-1/12$. Ici, le mathématicien doit adopter une approche scientifique, à la recherche de ce qui peut bien expliquer ce qu'on entend.

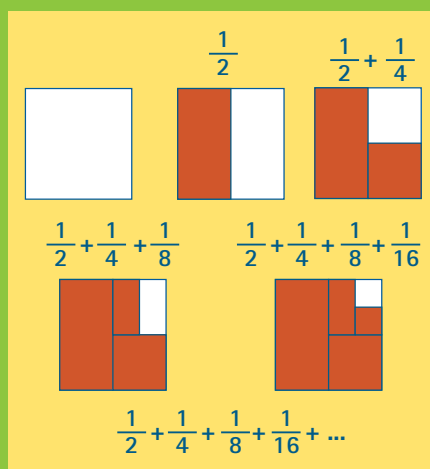
Sommer des séries infinies : un jeu d'enfant!

On sait bien que $1/3 = 0,333\dots$. En fait, cette simple affirmation cache une série infinie. En effet, $0,333\dots$ est une manière de dénoter la série infinie $3/10 + 3/100 + 3/1000 + \dots$. Alors, écrire que cela est égal à $1/3$ est la même chose que de dire que la série $3/10 + 3/100 + 3/1000 + \dots$ a pour somme $1/3$. On manipule donc des séries infinies dès que l'on travaille avec la notation décimale pour des nombres ayant des développements décimaux infinis.

Certaines sommations peuvent être plus surprenantes, alors que d'autres ont une jolie interprétation géométrique. Ainsi, on peut considérer la série $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$ dont la somme est 1. En effet, en coloriant successivement, la moitié d'un carré puis la moitié du rectangle restant, on se convainc intuitivement que la série

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

converge vers 1.



Une approche naïve

En regardant les divers sites qui proposent des preuves que

$$1 + 2 + 3 + \dots = -1/12,$$

on a des arguments comme celui dans l'encadré « Une preuve populaire ». Est-ce que de tels arguments peuvent être corrects?

Il est difficile de savoir exactement ce qui est utilisé dans une telle preuve. Regardons ce

qui semble permis. Dans la preuve populaire, on soustrait des séries terme à terme, et on utilise implicitement (donc sans l'écrire – une première cachette!) que

$$0 + 4 + 0 + 8 + 0 + 12 + \dots = 4 + 8 + 12 + \dots,$$

ce qui revient à ajouter ou enlever des 0 dans une somme.

Une preuve populaire

On veut déterminer la valeur de la série $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$

Pour y parvenir, on se sert de la série $G = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ appelée *série de Grandi* et de la série $B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$

Voici comment. En insérant des parenthèses après le premier signe de soustraction dans la série de Grandi, on a

$$\begin{aligned} G &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\ &= 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots) \\ &= 1 - G \\ 2G &= 1, \text{ d'où } G = 1/2. \end{aligned}$$

En soustrayant la série de Grandi de la série B , on obtient

$$\begin{aligned} B &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots \\ -G &= -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots \\ \hline B - G &= 0 - 1 + 2 - 3 + 4 - 5 - \dots \end{aligned}$$

On obtient $B - G = -B$
d'où $2B = G$ et $B = 1/4$.

En soustrayant la série B de la série S , on obtient

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots \\ -B &= -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - \dots \\ \hline S - B &= 0 + 4 + 0 + 8 + 0 + 12 + \dots \end{aligned}$$

On obtient donc $S - B = 4 + 8 + 12 + \dots = 4(1 + 2 + 3 + \dots) = 4S$

De $S - B = 4S$, on tire $3S = -B$.
On a donc $3S = -B = -1/4$.
Par conséquent, $S = -1/12$.

On a donc une « preuve » que $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -1/12$.

Luigi Guido Grandi (1671 – 1742)

Prêtre italien, philosophe, mathématicien et ingénieur né à Crémone, Grandi présente en 1703, une analyse de la série qui porte son nom.

La série de Grandi

La caractéristique de la série de Grandi est qu'en regroupant de deux façons différentes les termes de la série pour former une série télescopique, on obtient dans un cas

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$$

et dans l'autre cas

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1$$

ce qui donne $0 = 1$. Ici, on voit bien qu'on ne peut manipuler des séries infinies sans prendre garde.

Une nouvelle « preuve » que $0 = 1$

En utilisant le même genre d'argument que ceux de la preuve populaire, on peut obtenir que $0 = 1$. Notons S la somme des entiers naturels, on peut décrire cette somme par

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$$

ou par

$$S = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$$

Ces deux expressions sont égales et en soustrayant l'une de l'autre, on obtient 0, mais en soustrayant terme par terme, voici ce qui se produit

$$\begin{array}{r} S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots \\ -S = 0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 + 6 - \dots \\ \hline S - S = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots \\ \text{On obtient donc} \\ S - S = 0 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots \end{array}$$

On a donc

$$0 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

En ajoutant un 0 dans la partie droite, on a

$$0 = 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

En soustrayant ces deux expressions terme à terme, on obtient

$$\begin{array}{r} 0 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots \\ -0 = 0 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - \dots \\ \hline 0 = 1 \\ \text{En additionnant successivement 1} \\ \text{aux deux membres de l'égalité, on a} \\ 1 = 2, 2 = 3, 3 = 4, \dots \end{array}$$



Georg Cantor
1845-1918

On arrive donc à voir, sans trop de difficulté, que la preuve populaire semble bien basée sur des arguments qui mènent à des contradictions. Si $0 = 1$, tout est vrai! Est-ce à dire qu'on ne peut donner aucun argument sérieux qui expliquerait d'où vient cette valeur, et pourquoi elle pourrait avoir un sens?

Élargir la notion de sommation d'une série

Pour une suite (a_n) , on dit que la série $\sum a_n$ est simplement convergente si la limite des sommes partielles

$$s_n = \sum_{i=0}^n a_i, \text{ existe.}$$

Considérons les suites (a_n) pour lesquelles la série $\sum a_n$ est simplement convergente. Pour ces suites, appelons Σ l'opérateur qui associe à la suite (a_n) la limite de la suite des sommes partielles.

Les trois suites utilisées dans la preuve populaire ne répondent pas à cette définition. En d'autres mots, l'opérateur Σ n'est pas défini pour les suites

$$(g_n) = (+1, -1, +1, -1, +1, -1, \dots),$$

$$(b_n) = (+1, -2, +3, -4, +5, -6, \dots),$$

$$\text{et } (c_n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots),$$

Existe-t-il des généralisations de l'opérateur Σ qui soient définies sur des (a_n) pour lesquelles la série $\sum a_n$ n'est pas simplement convergente? C'est la question que l'on se pose.

Une approche scientifique

Des avancées scientifiques et mathématiques ont longtemps été critiquées avant d'être finalement acceptées. Un des exemples les plus souvent cités en mathématiques est celui de la cardinalité des ensembles, incluant celle des ensembles infinis. Bien que Cantor ait proposé une définition de ce qu'était un ensemble infini et de l'équipotence de deux ensembles infinis, et ait établi plusieurs résultats surprenants de manière solide, ses résultats ont été contestés. Ses idées étaient sans doute

trop surprenantes, et les conclusions auxquelles il arrivait étaient probablement trop choquantes pour l'intuition. On a refusé ce qu'on aurait dû accepter.

Étudier des séries divergentes comme

$$1 + 2 + 3 + \dots$$

n'est pas une mauvaise idée, et on peut donner un sens à des choses surprenantes. Une attitude ouverte, et scientifique, est donc de mise!

Sommer des séries divergentes, est-ce possible?

Peut-on donner un sens à la série

$$1 + 2 + 3 + \dots$$

sans utiliser des arguments comme ceux de la preuve populaire?

Une manière d'y répondre est de chercher à voir si on peut généraliser l'idée de sommation d'une série à de nouvelles séries. Ici, la réponse est positive, et il y a en fait plusieurs manières de le faire. Nous présentons, en encadré, une manière de poser cette question de manière plus précise.

On peut définir des généralisations de l'opérateur de sommation qui respectent les conditions naturelles de stabilité et de linéarité, en ce sens que ces sommes généralisées respectent l'addition ou la soustraction de deux séries terme à terme, la multiplication par un nombre (on dit habituellement un scalaire), et que décaler la série ne change pas la valeur de la sommation généralisée.

Une de ces méthodes – et il y en a plusieurs – est la sommation dite de Cesàro (voir encadré, page suivante). Elle permet de généraliser la sommation habituelle, puisqu'elle donne la même valeur que la somme habituelle pour les séries convergentes, et qu'elle donne une valeur à certaines séries divergentes. Ainsi, la somme de Cesàro donne la valeur 1/2 à la série

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Malheureusement, la somme de Cesàro de la série $1 + 2 + 3 + \dots$ n'existe pas. On a donc une généralisation qui n'est pas suffisante. On peut cependant faire mieux.

Somme de Cesàro de la série de Grandi			
Nombre n de termes	Somme partielle	Sommes cumulées	Moyenne
1	1	1	1
2	$1 - 1 = 0$	1	1/2
3	$1 - 1 + 1 = 1$	2	2/3
4	$1 - 1 + 1 - 1 = 0$	2	2/4
5	$1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1$	3	3/5
6	$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 = 0$	3	3/6
7	1	4	4/7
8	0	4	4/8
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮

On constate que la somme de Cesàro de la série de Grandi est 1/2.

Somme de Cesàro

Pour une suite a_n , on dit que la série $\sum a_n$ est convergente au sens de Cesàro si la limite des moyennes des sommes partielles $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(s_1 + s_2 + \dots + s_n)}{n}$ existe. Lorsque la limite des sommes partielles existe, on retrouve à nouveau cette valeur. Si on désigne par $C(a_n)$ la limite de cette somme, alors on a bien que C généralise \sum .

On peut voir que C est définie pour la suite (g_n) associée à la série de Grandi. En effet, $\frac{(s_1 + s_2 + \dots + s_n)}{n}$ tend vers la valeur 1/2 car $s_n = 0$ pour n pair, et $s_n = 1$ pour n impair (voir l'encadré ci-dessous).

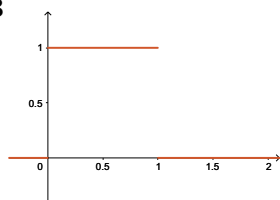
Par contre, C n'est pas définie pour (b_n) car pour cette suite,

$$\frac{(s_1 + s_2 + \dots + s_n)}{n} = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n} = \frac{n + 1}{2}$$

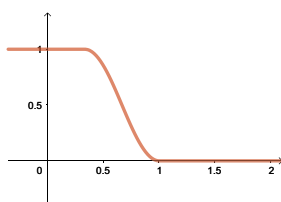
C n'est pas non plus défini pour (c_n) .

Ernesto Cesàro (1859–1906)

Le mathématicien italien Cesàro, dans *Éléments de calcul infinitésimal* (1897), propose une définition de la limite d'une suite divergente, connue aujourd'hui comme «Somme de Cesàro». Cette somme est la limite de la moyenne des sommes partielles de la série.



Fonction caractéristique de l'intervalle $[0, 1]$



Graphe de la fonction η

En route vers $-1/12$, il faut généraliser les sommes partielles

Lorsque l'on fait la sommation d'une série, on considère les sommes partielles S_N . On peut en fait généraliser cette idée pour avoir une fonction $S(N)$ qui est en fait définie pour $N \in \mathbb{R}$. En poussant cette idée un peu plus loin, on peut obtenir une nouvelle fonction $F(N)$, comme cela est expliqué dans l'encadré *lissage analytique réel*.

On peut voir avec quelques calculs que si la limite de la suite des sommes partielles existe, et donc que la série est convergente, alors $F(N)$ tend vers cette même limite. On a donc une véritable généralisation de la sommation usuelle d'une série.

Cette nouvelle fonction, définie sur les réels, a un bon comportement si la fonction utilisée pour la définir (la fonction dans l'encadré) est bien choisie. On peut ainsi utiliser les outils de l'analyse réelle (développement en série de Taylor et autres) pour étudier le com-

portement de la fonction $F(N)$ pour une série quelconque, et en particulier pour les séries divergentes. On peut obtenir des formules asymptotiques pour plusieurs séries, qui nous donnent une valeur approchée de la série pour de grandes valeurs de N .

Qu'en est-il pour la série $1 + 2 + 3 + \dots$? On peut montrer que pour cette série, la forme asymptotique est donnée par

$$F(N) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta(n/N) \times n = -1/12 + K \times N^2 + O(1/N)$$

où K est une constante, qui dépend de la fonction $\eta(x)$, et $O(1/N)$ indique que les termes manquants apportent une contribution bornée par une certaine constante divisée par N .

On voit, pour la première fois, le terme $-1/12$. Ce n'est pas la valeur de la somme mais bien le terme constant, qui ne dépend pas de N , dans le développement asymptotique de $F(N)$.

Lissage analytique réel

On peut voir la somme partielle d'une suite a_n comme une fonction $S(N)$ définie sur les naturels, et donnée par

$$S(N) = \sum_{i=1}^N a_n.$$

On peut élargir cette définition aux réels en adoptant comme définition que

$$S(x) = \sum_{i=1}^{[x]} a_n$$

où $[x]$ est la partie entière de x , et même adopter une définition équivalente donnée par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_{[0,1]}(n/x) \times a_n$$

où $X_{[0,1]}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, 1]$. Cette manière de décrire les

choses ne change rien à la valeur de $S(N)$ et elle ouvre une porte à une généralisation qui est extrêmement utile.

Au lieu de la fonction caractéristique $X_{[0,1]}$, on peut considérer une fonction continue qui vaut 1 près de l'origine et qui est nulle en dehors d'un certain intervalle. (On demande habituellement que cette fonction ait des dérivées continues d'ordre 1 et 2.)

Cela permet de définir une nouvelle fonction à valeurs réelles $F(x)$ qui est donnée par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta(n/x) \times a_n.$$

On voit que $F(x)$ est en fait définie pour tout x . Lorsque la série est convergente, $F(x)$ donne la même limite que $S(N)$.

L'origine du $-1/12$

Le mathématicien Ramanujan avait suggéré d'attribuer la valeur $-1/12$ à la somme des entiers naturels. Dans un passage de son premier cahier, il présente une preuve qui est d'une nature semblable à la preuve populaire présentée plus haut. Mais il va plus loin, sachant que cette preuve n'en est pas véritablement une.

Il présente aussi une autre preuve, plus complète, et propose de considérer que le terme constant d'une certaine représentation de la valeur de la somme est la valeur à attribuer à la série étudiée. La justification correcte de son résultat consiste à faire un travail qui est proche de celui que nous venons de présenter. Et c'est sans doute ici qu'il faut voir l'origine du $-1/12$. Il s'agit du terme constant d'une nouvelle formule qui représente la série que l'on veut étudier. Il ne s'agit pas de la valeur de la série au sens habituel, car la valeur asymptotique a d'autres termes, et on ne devrait donc pas écrire que la somme des entiers naturels donne $-1/12$ sans qualifier précisément ce que l'on affirme.

Un billet remarquable de Terrence Tao

Certains lecteurs auront sans doute lu que la valeur $-1/12$ vient de la valeur de la fonction Zeta de Riemann au point -1 . Il s'agit effectivement d'une manière de voir l'origine de cette valeur. Cependant le prolongement analytique requis pour justifier cela est plus complexe, de sorte qu'il est plus difficile de percevoir d'où vient effectivement la valeur de $-1/12$.

Dans un billet remarquable, Terrence Tao, un mathématicien exceptionnel, explique que dans l'approche que nous avons esquissée (par lissage analytique réel), le terme constant obtenu dans le développement asymptotique de la série aura toujours la même valeur que celle obtenue par prolongement analytique complexe. On a donc deux manières correctes de comprendre pourquoi il est naturel d'associer la valeur $-1/12$ à la somme des entiers naturels. Par contre, écrire que c'est égal demande à être soigneusement qualifié.

Prolongement analytique et fonction Zêta de Riemann

La fonction zêta de Riemann est donnée

$$z(s) = \sum \frac{1}{n^s}$$

où s est un nombre complexe dont la partie réelle est >1 . Cette fonction a des propriétés importantes, qui se traduisent par le fait qu'elle est dite analytique sur ce domaine. Elle peut alors essentiellement être étendue de manière unique au plan complexe (sauf en $s = 1$) de manière à demeurer analytique. Or on peut montrer que la fonction zêta, une fois étendue de cette manière, est telle que

$$z(-1) = -\frac{1}{12}.$$

Or, si on écrit la série

$$\sum \frac{1}{n^s}$$

en $s = -1$, on obtient la série

$$1 + 2 + 3 + \dots$$

On peut donc dire que la valeur $-1/12$ est associée à la série $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ par prolongement analytique.

Mais de là à dire que la somme de cette série est $-1/12$, il y a un pas que nous ne franchirons pas.

L'information paradoxale

Rubrique des Paradoxes

Jean-Paul Delahaye

Université des Sciences
et Technologies de Lille

Il arrive que l'on pense ne pas disposer d'assez d'informations pour résoudre un problème, alors qu'en réalité tout est à notre disposition. Certaines situations sont si extraordinaires qu'elles apparaissent paradoxales. En voici un exemple.

Un homme bavarde avec le facteur sur le pas de la porte de sa maison. Il lui dit :

« C'est amusant, je viens de remarquer que la somme des âges de mes trois filles est égale au numéro de ma maison dans la rue. Je suis sûr que, si je vous apprends que le produit de leur âge est 36, vous saurez me dire leur âge respectif ! »

Le facteur réfléchit un moment et lui répond :

« Je suis désolé, mais je ne peux pas trouver ».

L'homme s'exclame alors :

« Ah oui ! J'avais oublié de vous dire que l'aînée est blonde ! ».

Quelques secondes après, le facteur lui donne la bonne réponse ! Aussi paradoxal que cela apparaisse, vous pouvez déduire de cet échange l'âge des filles de l'homme sur le pas de sa porte.



Une troublante équation du second degré

Un théorème important de l'algèbre indique qu'une équation polynomiale de degré n (n entier ≥ 1) à coefficients réels possède, au plus, n solutions (réelles) : une équation de degré 1 possède au plus une solution ; une équation de degré 2 possède au plus deux solutions, etc. Pour l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, il n'y a pas de solution ; si $\Delta = 0$, il y a une solution unique $x = -b/2a$, et si $\Delta > 0$, il y a deux racines qui sont :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Pourtant, voici une exception à cette règle. Considérons trois nombres réels a , b et c fixés et deux à deux distincts (si vous le souhaitez, prenez $a=1$, $b=2$, $c=3$). Analysons l'équation suivante :

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} = 1.$$

C'est une équation de degré 2 en l'inconnue x car c'est une somme, chaque terme étant un polynôme de degré 2. Le nombre a est solution de l'équation car, quand on remplace x par a , le premier terme s'annule, de même que le troisième, alors que le second prend la valeur 1. Notons qu'aucun dénominateur ne s'annule, nous respectons bien les règles de calcul qu'impose ce genre de manipulations. Le nombre b et le nombre c , pour des raisons analogues, sont aussi solutions de cette équation qui possède donc trois solutions. Puisque a , b et c ont été supposés distincts, nous avons donc une équation du degré 2 possédant 3 solutions différentes.

Est-ce la trace d'un paradoxe au coeur de l'algèbre élémentaire, et faut-il entreprendre le rappel des millions de livres de mathématiques qui se trompent concernant les équations du second degré ?

Solution

L'équation est-elle vraiment de degré 2 ? Calculons le coefficient de x^2 . Il vaut :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(c-a)(c-b)} + \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} \\ &= \frac{(b-a) + (c-b) + (a-c)}{(c-a)(a-b)(b-c)} = 0. \end{aligned}$$

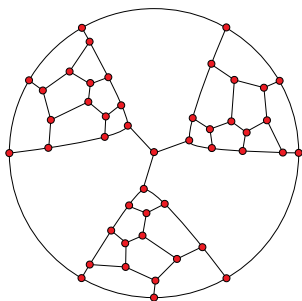
En poursuivant des calculs du même type, on découvre que le coefficient de x vaut lui aussi 0, et que le coefficient constant vaut 1. L'équation se simplifie donc en

$$1 = 1$$

qui possède non seulement les solutions a , b et c mais, en fait, une infinité de solutions puisque tout nombre réel convient. Quand l'inconnue n'est plus présente dans une équation, ou bien l'égalité résultante est fautive (exemple $0 = 1$) et alors aucun x n'est solution, ou bien l'égalité est vraie (exemple $1 = 1$) et alors tout x est solution. Pas besoin, donc, de corriger les livres d'algèbre : il faut simplement s'assurer, avant de considérer la règle générale pour les équations du second degré, que l'on a vraiment affaire à une équation du second degré !

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Section problèmes



Euclide II.5

Si une droite est coupée en deux segments égaux et en deux segments inégaux, le rectangle contenu par les segments inégaux de la droite entière, pris avec le carré sur le segment compris entre les points de section, est égal au carré sur la moitié de la droite.

Quelques identités logarithmiques

a) $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$;

b) $\log_b x^y = y \log_b x$;

c) $\log_b \sqrt[y]{x} = \frac{1}{y} \log_b x$;

d) $x^{\log_b y} = y^{\log_b x}$;

e) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

Le théorème des trois couleurs

Montrer que les arêtes du graphe ci-contre peuvent être coloriées avec trois couleurs de telle sorte que les arêtes attachées à chaque sommet soient de couleurs différentes.

Émergence logarithmique

1. Une jalousie peut aider à trouver le produit de deux « gros » nombres.

a) Évaluer le produit

$$99988777665 \times 9876543$$

en considérant que les nombres sont représentés en base mille.

(*Tuyau* : Il s'agit donc du produit d'un nombre « à quatre chiffres » par un nombre « à trois chiffres ».)

b) Reprendre le calcul en travaillant en base dix mille.

2. Un entier $m \geq 2$ étant fixé (le *module*), deux entiers a et b sont dits *congrus modulo m* si les restes obtenus en les divisant par m sont égaux.

a) Après avoir montré qu'un entier n est congru, modulo 9, à la somme de ses chiffres, justifier la preuve par neuf donnée (p. 2) pour le produit 934×314 . Que dire de la présence de faux positifs dans une preuve par neuf?

b) Montrer plus généralement qu'un entier, lorsqu'exprimé en base b , est congru à la somme de ses chiffres, modulo $b-1$. Donner une « preuve par neuf cent quatre-vingt-dix-neuf » du calcul effectué à la question 1-a.

3. Étant donné un entier positif n , le n^e nombre triangulaire est

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n.$$

On montre facilement (n'est-ce pas?) que

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } T_n + T_{n+1} = (n+1)^2.$$

Voici deux méthodes pour trouver un produit à l'aide d'une table de nombres triangulaires.

a) Étant donné deux entiers positifs a et b , exprimer chacun des carrés $(a+b)^2$, a^2 et b^2 comme une somme de deux nombres triangulaires. En tirer une méthode pour évaluer le produit ab à l'aide d'une table de nombres triangulaires.

b) Travailler à partir de l'égalité

$$ab = T_{a+b} - T_a - T_b$$

(que vous vérifierez).

4. Les deux expressions (p. 3) d'un produit ab en termes de la différence de deux carrés sont d'origine fort ancienne.

a) Interpréter la preuve visuelle résultant de la figure de la p. 3.

b) Relier ces expressions à la proposition 5 du Livre II des *Éléments* d'Euclide (voir ci-contre), où il est question d'un problème d'aires.

5. On s'intéresse au produit de deux entiers de parité différente, par exemple 9876×543 . Montrer, par un calcul à la Ludolf (voir p. 3), comment obtenir ce produit à partir d'une table de carrés. Faire le lien avec la méthode des quarts de carrés.

6. À propos de la construction d'une table de quarts de carrés (voir encadré p. 4), montrer que

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1).$$

7. a) Multiplier 6,21 et 0,257 par prosthaphérèse (voir p. 6).

b) Refaire le calcul en vous appuyant sur l'identité trigonométrique

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta).$$

c) Que dire d'une division par prosthaphérèse?

8. Établir les identités logarithmiques de l'encadré ci-contre.

9. Effectuer les calculs suivants à l'aide d'une table de logarithmes décimaux¹. (Au besoin, procéder par interpolation linéaire à partir des valeurs de la table.)

a) $\frac{3480 \times 1265}{0,00143}$ c) $\frac{32,64}{757,2}$

b) $\log 0,04786$ d) $\sqrt[5]{0,234}$

1. Voir <http://accromath.uqam.ca/accro/wp-content/uploads/2019/01/TableLogarithmes.pdf>

Pour en savoir plus!

Histoire des mathématiques

Émergence logarithmique : tables et calculs

- Texte d'Étienne Ghys, vulgarisateur chevronné, à propos des tables de multiplication :
Étienne Ghys, « Les tables de multiplication : mauvais souvenirs? » *Images des Mathématiques*, CNRS, 2009.
<http://images.math.cnrs.fr/Les-tables-de-multiplication.html> (publié le 14 janvier 2009).
- Denis Roegel, rattaché au Loria (Laboratoire lorrain de recherche en informatique et ses applications), a publié à propos de tables numériques de nombreux articles et rapports de recherche, disponibles à partir de la plateforme en ligne HAL (Hyper articles en ligne). Voir le site <https://hal.archives-ouvertes.fr/>
Roegel s'intéresse notamment à la reconstruction moderne de tables dans le cadre du projet LOCOMAT (Loria Collection of Mathematical Tables). On y trouve par exemple la reconstruction (avec commentaires) des tables de Crelle et de Ludolf.
- Les tables de multiplication d'Antoine Voisin peuvent être téléchargées à partir du site Gallica de la Bibliothèque nationale de France : <https://gallica.bnf.fr/>
- Texte de Glaisher à propos des quarts de carrés:
J.W.L. Glaisher, « The method of quarter squares. » *Nature*, vol. 40, no. 1041 (1889), pp. 573-576.
Le même texte a été republié un an plus tard, à l'intention des actuaires, dans *The Journal of the Institute of Actuaries* (institut fondé à Londres en 1848).
- Pour un regard récent sur la méthode des quarts de carrés :
Neville Holmes, « Multiplying with quarter squares. » *The Mathematical Gazette* 87 (2003) 296-299.
- Diverses versions de tables de logarithmes (par exemple à cinq ou sept décimales) peuvent être téléchargées sur internet à partir de Gallica. Les célèbres tables de Bouvard et Ratinet (6^e édition, 1908 — encore en usage à l'arrivée des calculatrices) sont accessibles sur Google Livres à l'url <https://archive.org/details/nouvellestables00ratigoog/page/n5>
- Le traité *Arithmétique de Trévise (L'Arte dell'Abbaco)* (1478) peut être téléchargé à partir de l'url <http://www.centromorin.it/info/abacho/abbacho.pdf>

Construction des mathématiques

Une somme qui sème la controverse

- Xavier Buff, *La somme des entiers* <http://images.math.cnrs.fr/La-somme-des-entiers> (publié le 5 juillet 2017)
- Terence Tao, *The Euler-Maclaurin formula, Bernoulli numbers, the zeta function, and real-variable analytic continuation*, <https://terrytao.wordpress.com/2010/04/10/the-euler-maclaurin-formula-bernoulli-numbers-the-zeta-function-and-real-variable-analytic-continuation/> (publié le 10 avril 2010).
- Numberphile team, *Astounding : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -1/12$* , visionné à <https://www.youtube.com/watch?v=w-l6XTVZXww>
- Grant Sanderson, Chaîne 3Blue1Bron, Visualizing the Riemann hypothesis and analytic continuation, <https://www.youtube.com/watch?v=sD0NjwqIYw>

L'union fait la force

- Breiman, L. (1984). *Classification and Regression Trees*. New York: Routledge.
- Breiman, L. (2001a). « Random Forests. » *Machine Learning*, 45 (1): 5–32.
- Breiman, L. (2001b). « Statistical modeling: The two cultures (with comments and a rejoinder by the author). » *Statistical Science*, 16 (3) : 199-231.

Accromath est une publication de l'Institut des sciences mathématiques (ISM) et du Centre de recherches mathématiques (CRM). La revue s'adresse surtout aux étudiantes et étudiants d'école secondaire et de cégep ainsi qu'à leurs enseignantes et enseignants.

ISM

Institut des sciences mathématiques

L'Institut des sciences mathématiques est une institution unique dédiée à la promotion et à la coordination de l'enseignement et de la recherche en sciences mathématiques au Québec. En réunissant neuf départements de mathématiques des universités québécoises (Concordia, HEC Montréal, Université Laval, McGill, Université de Montréal, UQAM, UQTR, Université de Sherbrooke, Bishop's), l'Institut rassemble un grand bassin d'expertises en recherche et en enseignement des mathématiques. L'Institut anime de nombreuses activités scientifiques, dont des séminaires de recherche et des colloques à l'intention des professeurs et des étudiants avancés, ainsi que des conférences de vulgarisation données dans les cégeps. Il offre également plusieurs programmes de bourses d'excellence.

L'ISM est financé par le Ministère de l'Enseignement supérieur et par ses neuf universités membres.

CRM

CENTRE
DE RECHERCHES
MATHÉMATIQUES

Le Centre de recherches mathématiques est un centre national pour la recherche fondamentale en mathématiques et ses applications. Les scientifiques du CRM comptent plus d'une centaine de membres réguliers et de stagiaires postdoctoraux. Lieu privilégié de rencontre, le Centre est l'hôte chaque année de nombreux visiteurs et d'ateliers de recherche internationaux.

Les activités scientifiques du CRM comportent deux volets principaux : les projets de recherche qu'entreprennent ses laboratoires, et les activités thématiques organisées à l'échelle internationale. Ces dernières, ouvertes à tous les domaines, impliquent des chercheurs du CRM et d'autres universités. Afin d'assurer une meilleure diffusion des résultats de recherches de ses collaborateurs, le CRM a lancé en 1989 un programme de publications en collaboration avec l'American Mathematical Society et avec Springer.

Le CRM est principalement financé par le CRSNG (Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada), le FQRNT (Fonds québécois de recherche sur la nature et les technologies), l'Université de Montréal, et par six autres universités au Québec et en Ontario.

Accromath bénéficie de l'appui de la Dotation Serge-Bissonnette du CRM.

